Топология, лекция 6: Произведения топологических пространств

Миша Вербицкий

3 марта, 2008

Независимый Университет

База топологии. Предбаза топологии.

Определение: **Базой топологии** на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что любое открытое множество получается как объединение элементов $\{U_\alpha\}$.

Определение: **Предбазой топологии** на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что любое открытое множество получается как объединение и конечное пересечение элементов из $\{U_\alpha\}$.

Замечание: Любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, такой, что $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, является предбазой некоторой топологии на M.

Замечание: Любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, замкнутый относительно конечных пересечений, и такой, что $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, является базой некоторой топологии на M.

База топологии: основные свойства.

Утверждение: Пусть M – топологическое пространство, а $\{U_\alpha\} \subset 2^M$ – набор открытых подмножеств в M. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. $\{U_\alpha\}$ **является базой топологии на** M**.**

2. Для каждого $x \in M$, и каждой окрестности $U \ni x$, **найдется окрестность** $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$**, такая, что**

$$x \in U_\alpha \subset U.$$

Пример: Открытые шары в метрическом пространстве.

Произведение топологических пространств

Пусть M, M' – топологические пространства, а $\mathcal{U} \subset 2^{M\times M'}$ - набор подмножеств $M \times M'$ вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Имеем

$$U_1 \times U_1' \cap U_2 \times U_2' = (U_1 \cap U_2) \times (U_1' \cap U_2'),$$

и поэтому $\mathcal{U}$ замкнут относительно конечных пересечений. Следовательно, **$\mathcal{U}$ – это база топологии на $M \times M'$**

Определение: Рассмотрим $M \times M'$ с топологией, заданной базой открытых множеств вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Это топологическое пространство называется **произведением M_1 и M_2**.

Свойства произведения: Если в M, M' выполнены следующие аксиомы, то и в $M \times M'$ они тоже выполнены.

1. Первая и вторая аксиома счетности.

2. Аксиомы Хаусдорфа T1 и T2.

Диагональ и график.

Определение: Отображение $M \longrightarrow M \times M$, $x \xrightarrow{\Delta} (x,x)$ называется **диагональным вложением**, а его образ - **диагональю**.

Свойства диагонали:

1. Отображение $M \xrightarrow{\Delta} M \times M$ непрерывно.

2. M хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ замкнута.

Определение: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – любое отображение. **График f** $\Gamma_f \subset X \times Y$ - множество всех пар вида $(x, f(x)) \in X \times Y$. Диагональ является графиком тождественного отображения.

Утверждение: График непрерывного отображения хаусдорфовых пространств замкнут: он является прообразом диагонали при непрерывном отображении

$$X \times Y \xrightarrow{f \times \mathsf{Id}} Y \times Y$$

Слабость и сила топологии

Определение: Пусть на множестве M заданы две топологии: $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$. Топология $\mathcal{U}_1$ **слабее** $\mathcal{U}_2$, если тождественное отображение $(M,\mathcal{U}_2) \longrightarrow (M,\mathcal{U}_1)$ непрерывно. В этом случае еще говорят $\mathcal{U}_2$ **сильнее** $\mathcal{U}_1$.

Замечание: **Это равносильно $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$.**

Чем слабее топология, тем больше сходящихся последовательностей, меньше непрерывных функций, и меньше открытых множеств.

На каждом множестве, кодискретная топология – самая слабая, а дискретная – самая сильная.

Пример: Равномерная сходимость на пространстве функций задает топологию, которая сильнее топологии поточечной сходимости.

Определение: Если на множестве заданы топологии $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, при этом $\mathcal{U}_1$ не слабее и не сильнее $\mathcal{U}_2$, говорят, что топологии $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ **несравнимы.**

Отображения в $M \times M'$.

Замечание: Топология произведения – слабейшая топология на $M \times M'$ такая, что проекции $M \times M' \xrightarrow{\pi} M$, $M \times M' \xrightarrow{\pi'} M'$ непрерывны. Действительно, предбаза топологии на $M \times M'$ порождена прообразами открытых множеств.

Утверждение: Отображение $X \xrightarrow{\varphi} M \times M'$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны композиции $\varphi \circ \pi$, $\varphi \circ \pi'$.

Это задает биекцию

$$\begin{Bmatrix} \text{пары непрерывных} \\ \text{отображений} \\ X \xrightarrow{\varphi} M, \ X \xrightarrow{\varphi'} M' \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{непрерывные} \\ \text{отображения} \\ X \longrightarrow M \times M' \end{Bmatrix}$$

Произведение нескольких пространств.

Определение. Произведение нескольких топологических пространств определяется индуктивно:

$$M_1 \times M_2 \times M_3 \times ... = (M_1 \times M_2) \times M_3 \times ...$$

Аналогично задается биекция

$$\left\{\begin{array}{l} n\text{-ки непрерывных} \\ \text{отображений} \\ X \xrightarrow{\varphi_i} M_i,\ i = 1, ..., n \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{непрерывные} \\ \text{отображения} \\ X \longrightarrow M_1 \times M_2 \times \cdots \end{array}\right\}$$

Замечание:
Из этого свойства следует ассоциативность произведения:

$$(M_1 \times M_2) \times M_3 = M_1 \times (M_2 \times M_3).$$

Действительно, из $M_1 \times (M_2 \times M_3)$ есть каноническое отображение в $(M_1 \times M_2) \times M_3$, которое получается из этого соответствия.

Произведение метрических пространств.

Утверждение. Пусть (M, d) и (M', d') - метрические пространства, а $\rho : (\mathbb{R}^{\geqslant 0})^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

невырожденность: $\rho(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$

субаддитивность: $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$

монотонность: $\rho(a, b) \geqslant \rho(a_1, b_1)$, если $a \geqslant a_1$, а $b \geqslant b_1$.

Тогда

$$d_\rho((x, x'), (y, y')) := \rho(d(x, y), d'(x', y'))$$

задает метрику на $M \times M'$.

Произведение метрических пространств (продолжение).

Неравенство треугольника в $(M \times M', d_\rho)$ доказывается так:

$$\begin{aligned}
d_\rho((x,x'),(z,z')) &= \rho(d(x,z), d'(x',z')) \\
&\leqslant \rho(d(x,y)+d(y,z), d'(x',y')+d'(y',z')) \\
&\leqslant \rho(d(x,y), d'(x',y')) + \rho(d(y,z), d'(y',z')) \\
&= d_\rho((x,x'),(y,y')) + d_\rho((y,y'),(z,z')).
\end{aligned}$$

Примеры функций ρ, удовлетворяющих этим условиям:

1. $\rho_1(x,y) = x+y$
2. $\rho_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $\rho_\infty(x,y) = \max(x,y)$.

Определение: Пусть M, M' – метрические пространства. Рассмотрим $(M \times M', d_{\rho_2})$, построенное выше. Оно называется **произведением** $M \times M'$.

Произведение метрических пространств и топология

Определение: Пусть $f: M_1 \longrightarrow M_2$ - биективное отображение метрических пространств. Оно называется **билипшицевым**, если f и f^{-1} липшицевы.

Билипшицево отображение – гомеоморфизм.

Замечание: Из неравенств

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b \leqslant 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\max(a,b) \leqslant a+b \leqslant 2\max(a,b).$$

следует, что тождественные отображения

$$(M \times M', d_{\rho_2}) \longrightarrow (M \times M', d_{\rho_1})$$

$$(M \times M', d_{\rho_\infty}) \longrightarrow (M \times M', d_{\rho_1})$$

являются гомеоморфизмами (они билипшицевы).

Произведение метрических пространств и топология (2)

Утверждение: Тождественное отображение

$$M \times M' \xrightarrow{\mathsf{Id}} (M \times M', d_{\rho_\infty})$$

гомеоморфизм.

Доказательство:
Шаг 1: Открытые шары в $(M \times M', d_{\rho_\infty})$ имеют вид $B_r(x) \times B_r(x')$. Следовательно, $M \times M' \xrightarrow{\mathsf{Id}} (M \times M', d_{\rho_\infty})$ непрерывно.

Шаг 2: Проекции $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \xrightarrow{\pi} M$, $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \xrightarrow{\pi'} M'$ непрерывны, потому что они липшицевы.

Шаг 3: Отображение $X \longrightarrow M \times M'$ непрерывно тогда и только тогда, когда его композиции с π, π' непрерывны. Поэтому

$$(M \times M', d_{\rho_\infty}) \xrightarrow{\mathsf{Id}} M \times M'$$

непрерывно.

Полуметрики: определение

Определение:
Пусть $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, такая, что выполнены:
Рефлексивность: $d(x,x) = 0$
Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$
Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Тогда d называется **полуметрикой**

От определения метрики это отличается только отсутствием условия невырожденности: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Определение:
Открытым шаром в полуметрике d называется множество

$$B_{r,d}(x) = \{y \in M \ \mid \ d(x,y) < r\}.$$

Открытые шары задают на M топологию, нехаусдорфову если M не метрика.

Замечание:
Условие $d(x,y) = 0$ задает на M отношение эквивалентности.

Полуметрики и метрики

Если $d(x,y)=0$, то

$$d(z,x)+d(x,y)\geqslant d(y,z),\quad d(z,y)+d(y,x)\geqslant d(z,x),$$

поэтому $d(z,x)=d(y,z)$. **Следовательно, функция d корректно определена на множестве $\underline{M}$ классов эквивалентности по отношению $d(x,y)=0$. Она задает метрику на $\underline{M}$.**

Утверждение: Каждое пространство (M,d) с полуметрикой наделено сюрьективным отображением $\pi: M\longrightarrow \underline{M}$ в метрическое пространство $(\underline{M},\underline{d})$, при этом

$$d(x,y)=\underline{d}(\pi(x),\pi(y)). \qquad (*)$$

Замечание: Если задано отображение $\pi: M\longrightarrow \underline{M}$ в метрическое пространство, то формула (*) определяет на M полуметрику.

Полунормы на векторном пространстве

Определение: Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\nu : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **полунормой** на V, если имеет место следующее

Неравенство треугольника: $\nu(v+v') \leqslant \nu(v)+\nu(v')$.
Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$.

Векторное пространство с полунормой наделено полуметрикой, по формуле $d(x,y) = \nu(x-y)$.

Определение: Множество векторов, удовлетворяющих $\nu(x) = 0$, называется **нуль-пространством** полунормы.

Замечание: Отображение $V \longrightarrow \underline{V}$ это отображение V в его факторпространство по нуль-пространству, а $\underline{V}$ - нормированное векторное пространство.

Тихоновская топология

Обозначения: $\operatorname{Map}(A, B)$ – множество всех отображений из A в B

Пусть M - некоторое множество, а $\mathfrak{I}$ – набор индексов (не обязательно конечный или счетный). Обозначим за $M^{\mathfrak{I}}$ произведение M на себя $\mathfrak{I}$ раз.

Замечание: Пространство $M^{\mathfrak{I}}$ естественно отождествляется с $\operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$

Если $\alpha \in \mathfrak{I}$, обозначим за $\pi_\alpha: M^{\mathfrak{I}} \longrightarrow M$ проекцию из $M^{\mathfrak{I}}$ на компоненту с индексом α.

Для набора индексов $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{I}$, обозначим за

$$\pi_{\alpha_1, ..., \alpha_n}: M^{\mathfrak{I}} \longrightarrow M^n$$

проекцию $M^{\mathfrak{I}}$ на произведение компонент с индексами $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Тихоновская топология (продолжение)

Утверждение: Пусть M – топологическое пространство, а $\mathcal{U}$ - слабейшая топология на $M^{\mathfrak{I}}$, в которой непрерывны все отображения π_α. Тогда $\mathcal{U}$ **задается предбазой вида**

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U) \quad | \quad \alpha \in \mathfrak{I}, U \subset M, \quad U \textbf{ открыто}\}.$$

Кроме того, $\mathcal{U}$ **задается базой вида**

$$\{\pi_{\alpha_1,...,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times ... \times U_n) \quad | \quad \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{I}, \quad U_i \subset M, \quad U_i \textbf{ открыты}\}.$$

Доказательство: Предбаза $\pi_\alpha^{-1}(U)$ состоит из прообразов открытых множеств на M. Конечные пересечения элементов из $\pi_\alpha^{-1}(U)$ задают $\pi_{\alpha_1,...,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times ... \times U_n)$, потому что

$$\bigcap_i \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i) = \pi_{\alpha_1,...,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times ... \times U_n),$$

Определение: Такая топология на $M^{\mathfrak{I}}$ называется **тихоновской**, или **топологией произведения,** или **слабой топологией**.

Тихоновская топология (продолжение)

Замечание: $M^{\mathfrak{I}}$ хаусдорфово, если M хаусдорфово.

Замечание: Отображение $X \longrightarrow M^{\mathfrak{I}}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны его композиции с π_α, для всех $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Определение: Пусть на множестве M задана набор полуметрик $\{d_\alpha\}$. **Топология, заданная семейством полуметрик $\{d_\alpha\}$** - это топология, построенная по предбазе $B_{r,d_\alpha}(x)$, для всех $x \in M, d_\alpha \in \{d_\alpha\}, r \in \mathbb{R}^{>0}$.

Утверждение: Пусть (M, d) – метрическое пространство. Для каждого индекса $\alpha \in \mathfrak{I}$, определим полуметрику d_α на $M^{\mathfrak{I}}$ по формуле

$$d_\alpha(x, y) = d(\pi_\alpha(x), \pi_\alpha(y)).$$

Рассмотрим топологию $\mathcal{U}_1$, определенную на M системой полунорм d_α. **Тогда эта топология совпадает с тихоновской.**

Доказательство: Предбаза для тихоновской топологии – прообразы открытых шаров $\pi_\alpha^{-1}(B_r(x)$. Топология $\mathcal{U}_1$ задается той же предбазой.

Полнота семейства полуметрик

Определение: Пусть $(M, \{d_\alpha\})$ пространство с семейством полуметрик, а $\{x_i\}$ – последовательность точек в M. Говорится, что $\{x_i\}$ – **последовательность Коши относительно этого семейства полуметрик**, если для каждого индекса α, и для каждого $\varepsilon > 0$, почти все элементы $\{x_i\}$ лежат в ε-шаре $B_{\varepsilon,d_\alpha}(x)$. Говорится, что $(M, \{d_\alpha\})$ **полно**, если каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками.

Утверждение: Пусть M – полное метрическое пространство, а $\mathfrak{I}$ - некоторый набор индексов. Рассмотрим $M^{\mathfrak{I}}$ с тихоновской топологией, и полуметриками d_α, заданными выше. Тогда $M^{\mathfrak{I}}$ полно.

Доказательство:
Пусть $\{x_i\} \in M^{\mathfrak{I}}$ - последовательность Коши. Отождествляя $M^{\mathfrak{I}}$ с $\operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$, мы можем рассматривать x_i как отображения $\mathfrak{I} \xrightarrow{x_i} M$.

По определению, $\{x_i\}$ является последовательностью Коши $\Leftrightarrow$ для каждого индекса $\alpha \in \mathfrak{I}$, образы $\{x_i(\alpha)\}$ задают последовательность Коши в M.

Поскольку M полно, последовательность Коши $\{x_i(\alpha)\}$ сходится к элементу $x(\alpha) \in M$. Это задает отображение $\mathfrak{I} \xrightarrow{x} M$, которое и будет пределом $\{x_i\}$.

Топология поточечной сходимости

Замечание: Последовательность

$$\{x_i\} \in \operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$$

сходится к $\mathfrak{I} \xrightarrow{x} M$ в тихоновской топологии тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_i(\alpha)\}$ сходится к $x(\alpha)$ для любого индекса α. Поэтому тихоновскую топологию называют еще **топологией поточечной (почленной) сходимости**.

Когда $M = \mathbb{R}$, а $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел), $M^{\mathfrak{I}}$ – это множество последовательностей вещественных чисел, с топологией почленной сходимости. Эту топологию часто называют **слабой топологией**.

Слабую топологию открыл венгерский математик Фридьеш Рисс.

Она замечательна тем, что не может быть индуцирована никакой нормой.

Frigyes Riesz
(1880 – 1956)

Гильбертов куб и тихоновский куб

Определение: Рассмотрим отрезок $[0,1]$, и пусть $[0,1]^{\mathbb{N}}$ – множество последовательностей точек из $[0,1]$. Для $\{x_i\},\{y_i\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, определим метрику формулой

$$d_h(\{x_i\},\{y_i\}) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{i^2}$$

Пространство $([0,1]^{\mathbb{N}}, d_h)$ называется **гильбертов куб**.

Определение: Пространство $[0,1]^{\mathbb{N}}$ с топологией произведения называется **тихоновский куб**.

Теорема: Тождественное отображение Id задает гомеоморфизм между тихоновским кубом I_t и гильбертовым кубом I_h.

Гильбертов куб и тихоновский куб (продолжение)

Доказательство того, что $I_h \xrightarrow{\operatorname{Id}} I_t$ – гомеоморфизм.

Шаг 1. Пусть $\pi_n: [0,1]^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ – проекция. Поскольку

$$\pi_n: I_h \longrightarrow [0,1]$$

n^2-липшицево, π_n **непрерывно на I_h.**

Шаг 2.
Для любого топологического пространства X, отображение $X \xrightarrow{\varphi} I_t$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\varphi \circ \pi_i$ непрерывна для всех i. Поэтому $I_h \xrightarrow{\operatorname{Id}} I_t$ **непрерывно.**

Шаг 3.
Пусть $(M, \{d_\alpha\})$ - пространство с топологией, заданной системой полуметрик $\{d_\alpha\}$, а $d_\alpha(x, \cdot): M \longrightarrow \mathbb{R}$ функция, которая переводит y в $d_\alpha(x,y)$. Тогда **функция $d_\alpha(x,\cdot)$ непрерывна.**

Гильбертов куб и тихоновский куб (часть 3)

Шаг 4. Пусть $\mathfrak{v} = \{v_i\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ – любая последовательность. Рассмотрим функцию $\mu_{\mathfrak{v}}: I_t \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mu_{\mathfrak{v}}(\{y_i\}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\{x_i\}, \{y_i\})}{k^2}$$

Она непрерывна, потому что является суммой ряда, составленного из функций вида $d_\alpha(x, \cdot)$.

Шаг 5.

Пусть $f: X \longrightarrow M$ – отображение из топологического пространства в метрическое пространство (M, d). Для любой точки $z \in M$, рассмотрим функцию $d_z: M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, $d_z(x) := d(z, x)$. **Если композиции $f \circ d_z: Z \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны для всех z, то f тоже непрерывна.**

Шаг 6. Тождественное отображение $I_t \xrightarrow{\iota} I_h$ непрерывно, потому что непрерывны функции $\iota \circ d_z$. В самом деле, $\iota \circ d_z = \mu_z$, где μ_z – функция, определенная в Шаге 4.

Андрей Николаевич Тихонов
(1906 – 1993)