7. Топология, лекция 7: Теорема о метризации

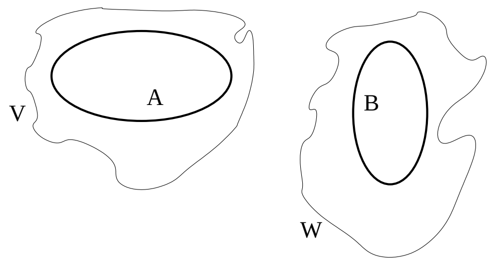
7.1. Нормальные топологические пространства

Определение 7.1. Топологическое пространство M называется **нормальным**, если любые два непересекающихся замкнутых подмножества A и $B \subset M$ имеют непересекающиеся окрестности.

Замечание 7.2. Напомним, что *аксиома Хаусдорфа* утверждает что любые две разные точки топологического пространства имеют непересекающиеся окрестности. Если все точки пространства замкнуты, то из нормальности вытекает хаусдорфовость. Пространство удовлетворяет аксиоме T4, если оно нормально и хаусдорфово.

Определение 7.3. Пусть $U \subset V$ два подмножества топологического пространства, причем замыкание U лежит в V. Это отношение обозначается так: $U \Subset V$.

Замечание 7.4. Нормальность топологического пространства равносильна такому свойству. Пусть $U \supset A$ – окрестность замкнутого множества A. Тогда есть окрестность $V \supset A$ такая, что $V \Subset U$. Возьмем $B := M \backslash U$, и воспользуемся определением нормальности. Это даст окрестность $U \supset A$, которая не пересекается с некоторой окрестностью $W \supset B$. Дополнение к W замкнуто, содержит V, и содержится в U, поэтому замыкание V тоже содержится в U.



Непересекающиеся окрестности замкнутых множеств

Замечание 7.5. Пусть $U_0 \Subset U_1$ - два открытых множества в нормальном топологическом пространстве. Тогда существует открытое множество $U_{1/2}$, с $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$. Действительно, возьмем в качестве A замыкание U_0, и воспользуемся предыдущим замечанием.

Замечание 7.6. Пусть M - метрическое пространство. Тогда M нормально и хаусдорфово. Действительно, пусть A, B - непересекающиеся замкнутые множества. Возьмем открытые множества

$$V := \bigcup_{z\in A} B_{\frac{1}{2}d(z,B)}(z), \quad W := \bigcup_{z\in B} B_{\frac{1}{2}d(z,A)}(z).$$

Они не пересекаются (проверьте это).

7.2. Функции Урысона

Определение 7.7. Пусть A, B - непересекающиеся замкнутые множества в топологическом пространстве M. Непрерывная функция $\varphi : M \longrightarrow [0,1]$ называется **функцией Урысона** (Urysohn function), если $\varphi\Big|_A = 0$, $\varphi\Big|_B = 1$.

Замечание 7.8. В метрическом пространстве функцию Урысона можно построить, воспользовавшись формулой

$$\varphi(z) = \min\left(1, \frac{d(x,A)}{d(x,B)}\right).$$

Теорема 7.9: (Лемма Урысона) Пусть M - топологическое пространство. M нормально тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых множеств существует функция Урысона.

Доказательство леммы Урысона довольно просто. Обозначим за U_1 дополнение к B, за U_0 обозначим A. Возьмем $U_{1/2}$ такое, что $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$, потом возьмем $U_{1/4}$ такое, что $U_0 \Subset U_{1/4} \Subset U_{1/2}$ и $U_{3/4}$ такое, что $U_{1/2} \Subset U_{3/4} \Subset U_1$. Воспользуемся индукцией. Получим, что для каждого двоично-рационального числа[1] $\lambda \in [0,1]$ выбрано множество U_λ, открытое при $\lambda > 0$, причем для $\lambda < \mu$, имеем $U_\lambda \Subset U_\mu$.

[1] Напомним, что двоично-рациональным числом называется рациональное число вида $\frac{n}{2^m}$, где n, m целые.

Рассмотрим функцию $\varphi: U_1 \longrightarrow [0,1]$

$$\varphi(x) := \inf\{\lambda \mid x \in U_\lambda\}.$$

Продолжим эту функцию на M, доопределив ее посредством $\varphi\Big|_B = 1$. Легко видеть, что $\varphi\Big|_A = 0$. Чтобы доказать, что φ - функция Урысона, надо убедиться в ее непрерывности. Для этого достаточно проверить, что $\varphi^{-1}([0,\alpha[)$ открыто, а $\varphi^{-1}([0,\beta])$ замкнуто, для любых $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Имеем

$$\varphi^{-1}([0,\alpha[) = \bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda$$

(проверьте это). Это множество очевидно открыто. Аналогично,

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\alpha>\beta} \varphi^{-1}([0,\alpha[) = \bigcap_{\alpha>\beta} \left(\bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda\right).$$

Это дает

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

Обозначим за $\overline{U_\lambda}$ замыкание U_λ. Поскольку

$$U_\lambda \subset \overline{U_\lambda} \subset U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}}$$

для каждого $\lambda > \beta$, имеем

$$\bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda \subset \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U_\lambda} \subset \bigcap_{\lambda>\beta} U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}} = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

Мы получили

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U_\lambda},$$

а это множество, очевидно, замкнуто. Мы доказали лемму Урысона.

Замечание 7.10. Если в пространстве верна лемма Урысона, оно нормально (докажите).

7.3. "Создатель советской топологии"

Основные результаты общей топологии принадлежат "московской школе топологии" - Урысону, Александрову и Тихонову, которые провели начало и середину 1920-х годов, решая проблему метризации топологических пространств, и изучая компактные пространства.

П. С. Александров был учеником Н. Н. Лузина, специалиста по теории функций действительного переменного. В конце 1910-х годов, Лузин занимался общими вопросами теории множеств. В 1917-м году Лузин предложил Александрову доказать общую форму континуум-гипотезы (о несуществовании множеств мощности, промежуточной между X и 2^X). Сейчас известно, что ни континуум-гипотеза, ни ее отрицание не следует из аксиом теории множеств. Александров провел немало времени, записывая доказательство этого утверждения, как оказалось - неправильное. После того, этой катастрофы, Александров бросил математику, и стал режиссером.

Проведя несколько лет в занятиях театром и литературной деятельностью, Александров вернулся в Москву и поступил в аспирантуру. Там он встретился с П. С. Урысоном, студентом на 2 года его младше.

После возвращения в Москву Александров продолжил занятия функциями действительного переменного, популярные в Москве. Урысон принадлежал к другому поколению. Начав свое образование как физик, он опубликовал свою первую статью, о рентгеновском свечении, в 1915-м году, 17-ти лет, но в скором времени заинтересовался математикой. Защитив диссертацию по интегральным уравнениям, Урысон, по совету Д. Ф. Егорова, занялся топологией, и провел 1921 и 1922 годы, разрабатывая теорию размерности для общего метрического пространства.

Урысон пытался объединить абстрактные топологические конструкции Хаусдорфа с геометрическими идеями, подчерпнутыми у Пуанкаре, и немало преуспел в этом - сам предмет теоремы о метризации состоит в нахождении геометрической структуры на абстрактном топологическом пространстве.

В 1921-22 годах Урысон читал в Московском Университете курс, под названием "Топология континуума", на котором приобщал московскую математическую общественность к топологии, и приобщил; П. С. Александров называет Урысона "создателем советской топологии". Тогда же Урысон стал, на краткое время, научным руководителем А. Н. Колмогорова (Колмогорову было 18 лет, но он успел прославиться, найдя контрпример к одной из задач Н. Н. Лузина).

К исследованиям Урысона вскоре присоединился и сам Александров, и в 1923-м году Александров и Урысон написали совместную работу, где дали определение компактного пространства (в терминологии того времени "бикомпактного"; русские специалисты по общей топологии до сих пор иногда используют это слово).

1923-й и 1924-й годы Александров и Урысон провели в поездках заграницу. Деньги на эти поездки они зарабатывали, читая в Москве, Воронеже, Смоленске и других городах публичные лекции по теории относительности Эйштейна. Выгодное соотношение курса червонца к западным валютам привело к тому, что денег от 20 лекций хватало для полугодичной поездки по научным центрам Европы, и длительных пешеходных экспедиций.

За 2 года, оставшиеся до его смерти в 1924-м году (Урысон утонул в море у берегов Бретани), Урысон доказал теорему о метризации нормальных пространств со счетной базой; для доказательства этой теоремы он изобрел лемму, названную его именем.

Павел Самуилович Урысон
(1898 - 1924)

Последней работой Урысона была статья об универсальном метрическом пространстве (универсальном пространстве Урысона), в которое изометрически вкладывается любое метрическое пространство ограниченной мощности и диаметра.

Лемма Урысона считается важнейшим результатом общей топологии, наряду с теоремой Тихонова о компактности произведения компактных пространств. Условие нормальности, которое требуется в лемме Урысона, совсем не ограничительно: как будет видно из следующей лекции, любое компактное, хаусдорфово пространство нормально.

Из леммы Урысона следует чрезвычайно полезная *теорема Титце о продолжении* (Tietze extension theorem): если $A \subset M$ – замкнутое подмножество нормального топологического пространства, а $f : A \longrightarrow [0,1]$ – непрерывная функция на A, ее можно продолжить до непрерывной функции $F: M \longrightarrow [0,1]$ такой, что $F\Big|_A = f$.

Для доказательства этой теоремы требуется равномерная сходимость функций: надо записать f как сумму ряда, составленного из функций $f_i : M \longrightarrow [0,\alpha_i]$, $\sum \alpha_i < 1$, постоянных на замкнутых подмножествах A, и продолжить каждую из этих функций до функции из M в $[0,\alpha_i]$ по лемме Урысона.

7.4. Нормальные пространства и нуль-множества

Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что M **удовлетворяет аксиоме T6,** если оно хаусдорфово, нормально и каждое замкнутое подмножество в M получается как пересечение счетного числа своих окрестностей.

Утверждение 7.11: Любое хаусдорфово, нормальное пространство M со счетной базой удовлетворяет T6.

Доказательство
Шаг 1: Пусть $\{U_i\}$ - множество всех элементов из счетной базы топологии M таких, что замыкание каждого U_i не пересекается с A. Выведите из нормальности, что $\bigcup_i U_i = M\backslash A$.

Шаг 2: Возьмем, для каждого U_i, открытое множество $V_i := M\backslash\overline{U_i}$, где $\overline{U_i}$ – замыкание U_i. Пересечение всех V_i содержит A, поскольку $\overline{U_i}$

не пересекаются с A. С другой стороны,

$$\bigcap V_i \subset \bigcap_i (M \backslash U_i) = M \backslash \bigcup_i U_i = A.$$

Мы доказали, что в M выполняется аксиома T6. ■

Теорема 7.12: Пусть M – нормальное топологическое пространство, а $A \subset M$ – замкнутое подмножество. Тогда следующие свойства равносильны.

(i) Множество A можно получить как пересечение счетного числа открытых окрестностей $W_i \supset A$.

(ii) Существует непрерывная функция $f: M \longrightarrow [0,1]$ такая, что $A = f^{-1}(0)$.

Доказательство: Из утверждения (ii) легко следует (i). Действительно, $A = \bigcap_i f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}[)$, а все эти множества открыты. Следствие (i) $\Rightarrow$ (ii) можно получить, немного видоизменив аргумент, доказывающий лемму Урысона. Возьмем в качестве B пустое множество, и пусть $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset ...$ – последовательность открытых множеств, дающая $\bigcap_i V_i = A$.

Будем строить набор открытых множеств $U_{\frac{m}{2^n}}$, $U_\lambda \Subset U_\mu$ для всех $\lambda < \mu$, таким образом, чтобы множество $U_{\frac{1}{2^n}}$ содержалось в V_n. Это можно осуществить, заменив на каждом шаге выбранное $U_{\frac{1}{2^n}}$ на $U_{\frac{1}{2^n}} \cap V_n$. Такая замена корректна, ибо все, что требуется от $U_{\frac{1}{2^n}}$ условиями конструкции Урысона – это $A \subset U_{\frac{1}{2^n}} \Subset U_{\frac{1}{2^{n-1}}}$, а при замене $U_{\frac{1}{2^n}}$ на $U_{\frac{1}{2^n}} \cap V_n$, это условие сохраняется.

Пусть

$$f(x) := \inf\{\lambda \mid x \in U_\lambda\}$$

функция Урысона, построенная по набору $\{U_\lambda\}$, и принимающая значение 0 на A. Тогда $f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}[) \subset V_i$, а значит

$$f^{-1}(0) = \bigcap_i f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2^i}\right[\right) \subset \bigcap_i V_i = A.$$

■

Определение 7.13. Пусть $A \subset M$ – замкнутое подмножество, такое, что для некоторой непрерывной функции $f: M \longrightarrow [0,1]$ имеем $A = f^{-1}(0)$. Тогда A называется **нуль-множеством**.

Таким образом, аксиома T6 для топологического пространства M равносильна тому, что M нормально, хаусдорфово, а всякое замкнутое подмножество M является нуль-множеством.

7.5. Теорема Урысона о метризации

Пусть M – нормальное, хаусдорфово топологическое пространство. Тогда для любых двух разных точек $x, y \in M$ найдется функция Урысона $f_{x,y}: M \longrightarrow [0,1]$, принимающая 0 на x, и 1 на y.

Возьмем в качестве множества индексов множество $\mathfrak{I} = M \times M \backslash \Delta$, где Δ это диагональ. Функции $f_{x,y}$ задают отображение

$$M \xrightarrow{\prod_{(x,y)\in\mathfrak{I}} f_{x,y}} [0,1]^{\mathfrak{I}} \qquad (7.5.1)$$

в тихоновский куб; по определению топологии произведения, оно непрерывно. Поскольку $f_{x,y}(x) \neq f_{x,y}(y)$, отображение $F := \prod_{(x,y)\in\mathfrak{I}} f_{x,y}$ инъективно.

Это утверждение не очень полезно. Из инъективности F не следует, что M гомеоморфно образу F. Также, тихоновский куб $[0,1]^{\mathfrak{I}}$ не метризуем, если $\mathfrak{I}$ несчетно.

Немного видоизменив этот аргумент, можно добиться и того, и другого.

Теорема 7.14: Пусть M – нормальное, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Тогда существует непрерывное, инъективное вложение $M \overset{\Phi}{\hookrightarrow} [0,1]^{\mathbb{N}}$ в счетное произведение отрезков. Более того, Φ является гомеоморфизмом M на его образ.

Замечание 7.15. Из теоремы 7.14 немедленно следует теорема Урысона о метризации: любое нормальное, хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой метризуемо. Действительно, M гомеоморфно подмножеству тихоновского куба $[0,1]^{\mathbb{N}}$, а тихоновский куб метризуем, ибо он гомеоморфен гильбертову кубу (об этом см. предыдущую лекцию).

Доказательство теоремы 7.14.
Пусть $\{U_i\}$ – счетная база топологии M, а $A_i := M \backslash U_i$. Поскольку M – нормальное, хаусдорфово пространство со счетной базой, каждое A_i

является нуль-множеством. И в самом деле, из Утверждения 7.11 следует, что в M выполнено условие T6. Из Теоремы 7.12 следует, что в такой ситуации существует функция $f_i : M \longrightarrow [0,1]$, такая, что $f_i^{-1}(0) = A_i$.

Возьмем следующее отображение из M в тихоновский куб:

$$M \xrightarrow{\prod_i f_i} [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

Поскольку U_i это база хаусдорфовой топологии, для любых двух точек $x \neq y$ существует A_i, которое содержит x и не содержит y (докажите это). Поскольку $f_i^{-1}(0) = A_i$, соответствующая функция Урысона удовлетворяет $f_i(x) = 0, f_i(y) \neq 0$. Поэтому $\Phi := \prod_i f_i$ инъективно.

Для доказательства Теоремы 7.14, осталось убедиться, что Φ – это гомеоморфизм M на его образ. А приори, это может быть и не так. Например, если M – пространство с дискретной топологией, любое отображение $M \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$ непрерывно, но не любое вложение – гомеоморфизм.

Чтобы Φ было гомеоморфизмом на его образ, нужно, чтобы любое открытое множество в M получалось как прообраз $\Phi^{-1}(U)$, для какого-то открытого $U \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$. Для открытых множеств, принадлежащих базе U_i, это верно, ибо $U_i = f_i^{-1}(]0,1])$, а множество U_i будет прообразом открытого множества вида

$$[0,1] \times [0,1] \times \cdots \times]0,1] \times [0,1] \times \cdots \subset [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

Поскольку каждое открытое множество в M получается объединением U_i, все открытые множества в M – прообразы открытых в $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Поэтому Φ – гомеоморфизм. Мы доказали теорему Урысона. ■

7.6. Теоремы о метризуемости

Теорема Урысона дает полную характеризацию метризуемых топологических пространств со счетной базой. Пространство со счетной базой является метризуемым тогда и только тогда, когда оно нормально и хаусдорфово.

Для пространств, не имеющих счетной базы, простого критерия метризуемости нет.

Существует много версий метризационной теоремы, которые не требуют счетной базы.

Самая полезная из них принадлежит Ю. М. Смирнову (1951), и требует определения паракомпактности. В дальнейшем это понятие использоваться не будет.

Определение 7.16. Покрытие $\{U_\alpha\}$ топологического пространства M называется **локально конечным**, если любая точка M лежит в конечном числе элементов $\{U_\alpha\}$ Покрытие $\{V_\beta\}$ называется **измельчением** покрытия $\{U_\alpha\}$, если каждый элемент $\{V_\beta\}$ лежит в каком-то элементе $\{U_\alpha\}$. Топологическое пространство M называется **паракомпактным**, если каждое покрытие M имеет локально конечное измельчение.

Английский математик Артур Харольд Стоун (Arthur Harold Stone), изобретатель флексагона, доказал в 1948-м году, что все метрические пространства паракомпактны. Теорема Смирнова о метризации утверждает, наоборот, что любое паракомпактное топологическое пространство метризуемо, если оно *локально метризуемо*, то есть если у каждой точки есть метризуемая окрестность. Таким образом удается ответить на вопрос о метризуемости многообразий (топологических пространств, которые локально гомеоморфны $\mathbb{R}^n$).

8. Топология, лекция 8: Компакты

8.1. Компакты и слабо секвенциально компактные пространства

Следующее определение хорошо всем знакомо.

Определение 8.1. Топологическое пространство M называется **компактным**, если каждое открытое покрытие M имеет конечное подпокрытие.

Термин "компакт" введен Фреше, а современное понятие компакта принадлежит П. С. Урысону и П. С. Александрову.

Павел Сергеевич Александров
(1896 - 1982)

Замечание 8.2. Замкнутое подмножество компакта очевидно компактно (докажите). Обратное, вообще говоря, неверно. В отличие от ситуации, известной из метрической топологии, компактные подмножества не обязательно замкнуты. Замкнутость компакта следует из хаусдорфовости.

Действительно, пусть $X \subset M$ - компактное подмножество, а z - точка его замыкания, которая не лежит в Z. Воспользовавшись хаусдорфовостью, найдем у каждой точки $x \in X$ окрестность $U_x \ni x$, замыкание которой $\overline{U_x}$ не содержит z. Выбрав из $\{U_x\}$ конечное подпокрытие, получим покрытие U_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$ множества X, причем для всех i, замыкание $\overline{U_i}$ не содержит z. Воспользуемся равенством

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

(докажите его). Получаем, что $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ замкнуто и не содержит z.

Замечание 8.3. Мы доказали, что всякое компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве замкнуто. В нехаусдорфовом пространстве это не всегда верно (докажите).

Следующий элементарный факт чрезвычайно важен.

Утверждение 8.4: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение. Тогда образ компактного подмножества X компактен.

Доказательство. Пусть $Z \subset X$ - компактное подмножество, а $f(Z)$ – его образ. Возьмем открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $f(Z)$. Прообразы элементов этого покрытия образуют покрытие $\{f(U_\alpha)\}$ компактного множества Z; выбрать из него конечное подпокрытие значит выбрать конечное покрытие из $\{U_\alpha\}$.■

Определение 8.5. Топологическое пространство M называется **слабо секвенциально компактным**, если каждая последовательность $\{x_i\}$ в M имеет предельную точку (точку, в любой окрестности которой содержится бесконечное количество членов $\{x_i\}$).

Замечание 8.6. Для метрических пространств, слабая секвенциальная компактность совпадает с обычной, как следует из теоремы Гейне-Бореля.

Утверждение 8.7: Слабая секвенциальная компактность вытекает из обычной.

Доказательство: Пусть M – компактное топологическое пространство. Из компактности легко выводится, что последовательность вложенных, непустых, замкнутых подмножеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

всегда имеет непустое пересечение. Пусть $\{x_i\}$ – последовательность точек M, R_n – множество $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$, а $\overline{R_n}$ – его замыкание. Тогда пересечение $\bigcap_i \overline{R_i}$ непусто. Ясно, что это пересечение состоит из предельных точек последовательности $\{x_i\}$. Значит, M слабо секвенциально компактно. ■

Определение 8.8. Топологическое пространство M называется **счетно компактным**, если из любого счетного покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 8.9: Пусть M – топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме Хаусдорфа T1 (все точки M замкнуты). Тогда для M слабая секвенциальная компактность равносильна счетной.

Доказательство: Пусть M счетно компактно, а $\{x_i\}$ – последовательность, не имеющая предельных точек. Положим $U_n := M\backslash\{x_1, ...x_{n-1}\}$. В силу T1 и отсутствия у $\{x_i\}$ предельных точек, все U_i открыты. Тогда $\{U_i\}$ – счетное покрытие M, не имеющее конечного подпокрытия. Если же, наоборот, M слабо секвенциально компактно, а $\{U_i\}$ – счетное покрытие, из котогого нельзя выбрать конечного подпокрытия, рассмотрим $V_n := \bigcup_{i=1}^n U_i$. Легко видеть, что $\{V_i\}$ – тоже покрытие, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия, причем $V_{i-1} \subset V_i$ Выкинув совпадающие V_i, можно считать, что $V_{i-1} \subsetneq V_i$. Пусть последовательность $\{x_i\}$ выбрана таким образом, что $x_i \in V_i\backslash V_{i-1}$, а x – ее предельная точка. Предположим, что $x \in V_N$. Тогда бесконечное число элементов $\{x_i\}$ лежит в V_N, что невозможно по построению этой последовательности. ■

Любая непрерывная функция $f : \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ на счетном компакте принимает максимум и минимум. Действительно, пусть $\{x_i\}$ - последовательность точек, такая, что

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} f(x_i) = \sup_{x\in M} f(x),$$

а x - предельная точка этой последовательности. Поскольку f непрерывно, $f(x) = \sup_{x\in M} f(x)$ (докажите).

Мы получили такую цепочку импликаций, верных для любого топологического пространства:

$$\boxed{\text{компактность}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{слабая}\\ \text{секвенциальная}\\ \text{компактность}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{непрерывные функции}\\ \text{достигают минимума и}\\ \text{максимума}\end{array}}$$

8.2. Компакты и нормальные пространства

Следующая простая теорема чрезвычайно полезна, потому что из нее вытекает существование функций Урысона на компактах.

Теорема 8.10: Пусть M – компактное, хаусдорфово топологическое пространство. Тогда M нормально.

Доказательство.
Шаг 1: Докажем, что в M выполнена аксиома T3, то есть для каждого

замкнутого множества $A \subset M$, и точки $x \notin A$, существуют непересекающиеся окрестности A и x. Это равносильно тому, что у A есть окрестность, замыкание которой не содержит x.

Для всех $z \in A$, выберем окрестность $U_z \ni z$, замыкание которой $\overline{U_z}$ не содержит x (такая окрестность существует в силу хаусдорфовости – докажите). Поскольку A компактно, а U_z - открытое покрытие A, из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, ..., U_n$. Замыкание множества $\bigcup U_i$ не содержит x, потому что

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}. \qquad (8.2.1)$$

Шаг 2: Тот же самый аргумент позволяет вывести из T3 и компактности T4. Пусть A и B - два непересекающихся замкнутых подмножества M. Нам нужно найти окрестность A такую, что ее замыкание не пересекается с B. У каждой точки $z \in A$ есть окрестность U_z, замыкание которой не пересекается с B, в силу T3. Выбрав из $\{U_z\}$ конечное подпокрытие, как на предыдущем шаге, мы получим конечное покрытие A множествами $U_1, ..., U_n$ такими, что $\overline{U_i} \cap B = \emptyset$. Снова воспользуемся (8.2.1), и получим, что $\bigcup U_i$ – окрестность A, замыкание которой не пересекается с B. ■

Для компакта проблема метризации дополнительно упрощается следующим простым и чрезвычайно важным наблюдением.

Утверждение 8.11: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное вложение хаусдорфовых топологических пространств, причем X – компакт. Рассмотрим образ $f(X) \subset Y$ как топологическое пространство, с индуцированной топологией. Тогда f – это гомеоморфизм.

Доказательство: Для доказательства, нам нужно убедиться, что образ открытого множества открыт в $f(X)$. Это равносильно тому, что образ замкнутого множества замкнут.

Как мы только что видели, образ компактного подмножества всегда компактен. Поскольку X компактно и хаусдорфово, компактность подмножества равносильна его замкнутости. Поэтому образ любого замкнутого подмножества $A \subset X$ компактен в Y, а следовательно, замкнут. ■

Мы использовали этот факт несколько лекций назад, при доказательстве того, что непрерывное взаимно однозначное отображение из отрезка в отрезок – это гомеоморфизм.

Замечание 8.12. Легко видеть, что из Утверждения 8.11 и леммы Урысона следует, что всякое компактное, хаусдорфово топологическое пространство M гомеоморфно подмножеству тихоновского куба $[0,1]^{\mathfrak{I}}$, где $\mathfrak{I} = M \times M \backslash \Delta$. Непрерывное вложение $M \xrightarrow{\Phi} [0,1]^{\mathfrak{I}}$ было построено в (7.5.1) с использованием леммы Урысона и нормальности M, доказанной для компактов чуть выше. В силу Утверждения 8.11, отображение Φ является гомеоморфизмом M на его образ.