Топология, лекция 7: Теорема Урысона о метризации

Миша Вербицкий

10 марта, 2008

Независимый Университет

Нормальные пространства

Определение: Пространство M называется **нормальным**, если любые два непересекающихся замкнутых подмножества имеют непересекающиеся окрестности.

Замечание: Напомним, что **аксиома Хаусдорфа** утверждает что любые две разные точки топологического пространства имеют непересекающиеся окрестности. Если все точки пространства замкнуты, то из нормальности вытекает хаусдорфовость. **Пространство удовлетворяет аксиоме T4, если оно нормально и хаусдорфово.**

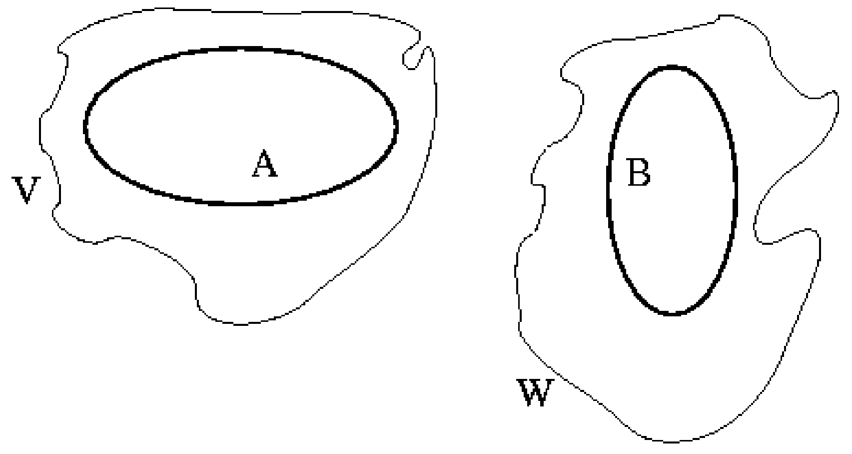
Замечание: Метрические пространства нормальны. Непересекающиеся окрестности A и B задаются так:

$$V := \bigcup_{z\in A} B_{\frac{1}{2}d(z,B)}(z), \quad W := \bigcup_{z\in B} B_{\frac{1}{2}d(z,A)}(z).$$

Определение: Пусть $U \subset V$ – два подмножества топологического пространства, причем замыкание U лежит в V. Это отношение обозначается так: $U \Subset V$.

Окрестности, удовлетворяющие $U \Subset V$

Утверждение: Нормальность топологического пространства равносильна следующему свойству. **Пусть $U \supset A$ – окрестность замкнутого множества A. Тогда есть окрестность $V \supset A$ такая, что $V \Subset U$.**



Для доказательства этого, возьмем $B := M \backslash U$, воспользуемся нормальностью, и убедимся, что $\overline{V} \subset M \backslash W$.

Замечание: Пусть $U_0 \Subset U_1$ - два открытых множества в нормальном топологическом пространстве. **Тогда существует открытое $U_{1/2}$, такое, что $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$.** Для доказательства, возьмем $A := \overline{U_0}$, и воспользуемся утверждением выше.

Функции Урысона

Определение: Пусть A, B - непересекающиеся замкнутые множества в топологическом пространстве M. Непрерывная функция $\varphi : M \longrightarrow [0,1]$ называется **функцией Урысона**, если $\varphi\Big|_A = 0$, $\varphi\Big|_B = 1$.

Замечание. В метрическом пространстве функции Урысона существуют для любых замкнутых A и B:

$$\varphi(z) = \min\left(1, \frac{d(x,A)}{d(x,B)}\right).$$

Лемма Урысона:
Топологическое пространство M нормально тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых множеств существует функция Урысона.

Замечание: Из существования функции Урысона φ для любых A, B, нормальность M следует немедленно. Действительно, возьмем

$$U := \varphi^{-1}([0,1/3[), \quad V := \varphi^{-1}(]2/3,1]).$$

Доказательство леммы Урысона

Обозначим за U_1 дополнение к B, за U_0 обозначим A. Возьмем $U_{1/2}$ такое, что $U_0 \Subset U_{1/2} \Subset U_1$, потом возьмем $U_{1/4}$ такое, что $U_0 \Subset U_{1/4} \Subset U_{1/2}$ и $U_{3/4}$ такое, что $U_{1/2} \Subset U_{3/4} \Subset U_1$. Воспользуемся индукцией.

Получим, что **для каждого двоично-рационального числа вида $\frac{n}{2^m} \in [0,1]$, задано множество U_λ, открытое при $\lambda > 0$, причем для $\lambda < \mu$, имеем $U_\lambda \Subset U_\mu$.**

Рассмотрим функцию $\varphi: \ U_1 \longrightarrow [0,1]$

$$\varphi(x) := \inf\{\lambda \mid x \in U_\lambda\}.$$

Доопределим: $\varphi\Big|_B = 1$.

Утверждение: Это функция Урысона.

Условие $\varphi\Big|_A = 0$, $\varphi\Big|_B = 1$ очевидно, осталось проверить непрерывность. Для этого достаточно проверить, что $\varphi^{-1}([0,\alpha[)$ открыто, а $\varphi^{-1}([0,\beta])$ замкнуто.

Доказательство леммы Урысона (продолжение)

По определению, $\varphi^{-1}([0,\alpha[) = \bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda$
Это множество очевидно открыто.

Доказательство замкнутости $\varphi^{-1}([0,\beta])$.

1. Докажем $\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda$:

$$\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\alpha>\beta} \varphi^{-1}([0,\alpha[) = \bigcap_{\alpha>\beta} \left(\bigcup_{\lambda<\alpha} U_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

2. Докажем $\varphi^{-1}([0,\beta]) = \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U_\lambda}$:
Поскольку $U_\lambda \Subset U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}}$, имеем $U_\lambda \subset \overline{U_\lambda} \subset U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}}$. Поэтому

$$\bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda \subset \bigcap_{\lambda>\beta} \overline{U_\lambda} \subset \bigcap_{\lambda>\beta} U_{\lambda+\frac{\lambda-\beta}{2}} = \bigcap_{\lambda>\beta} U_\lambda.$$

Это множество очевидно замкнуто.

Мы доказали лемму Урысона.

Павел Самуилович Урысон
(1898 - 1924)

Нормальность в пространствах со счетной базой

Определение: Напомним, что M **удовлетворяет аксиоме T6,** если оно хаусдорфово, нормально, и каждое замкнутое подмножество в M получается как пересечение счетного числа своих окрестностей.

Предложение: Любое хаусдорфово, нормальное пространство M со счетной базой удовлетворяет T6.

Доказательство.
Шаг 1: Пусть $\{U_i\}$ - множество всех элементов из счетной базы топологии M таких, что замыкание каждого U_i не пересекается с A. **Из нормальности следует, что $\bigcup_i U_i = M\backslash A$.**

Шаг 2: Возьмем $V_i := M\backslash\overline{U_i}$. Получим

$$\bigcap_i V_i \supset M\backslash \left(\bigcup_i U_i\right) = A$$

Мы получили, что $\bigcap_i V_i = A$.

Нуль-множества

Определение: Пусть $A \subset M$ – замкнутое подмножество M. Оно называется **нуль-множеством**, если существует непрерывная функция $f : M \longrightarrow [0,1]$ такая, что $A = f^{-1}(0)$.

Замечание: В метрическом пространстве, любое замкнутое множество A является нуль-множеством. В качестве f можно взять функцию $x \longrightarrow d(x, A)$.

Теорема: Пусть M – нормально, а $A \subset M$ – замкнуто. Тогда следующие условия равносильны: **(a).** A можно получить как пересечение счетного числа открытых окрестностей $W_i \supset A$. **(b).** A – нуль-множество.

Замечание: Нуль-множество очевидно получается как пересечение счетного числа открытых множеств: $\bigcap_i f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}[)$.

Замечание: Из этой теоремы следует, что **аксиома T6 для M равносильна тому, что M нормально, хаусдорфово, а всякое замкнутое подмножество M является нуль-множеством.**

Доказательство теоремы о нуль-множестве

Пусть $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset ...$ – последовательность открытых множеств, дающая в пересечении A. **Воспользуемся аргументом, который доказывает лемму Урысона, взяв в качестве B пустое множество.**

Будем строить набор открытых множеств $U_{\frac{m}{2^n}}$, $U_\lambda \Subset U_\mu$, таким образом, чтобы множество $U_{\frac{1}{2^n}}$ содержалось в V_n.

Возьмем U_λ как в доказательстве Урысона, на каждом шаге заменяя $U_{\frac{1}{2^n}}$ на $U_{\frac{1}{2^n}} \cap V_n$. От $U_{\frac{1}{2^n}}$ нам нужно только $A \subset U_{\frac{1}{2^n}} \Subset U_{\frac{1}{2^{n-1}}}$. это условие при такой замене сохраняется.

Получим функцию Урысона $f(x) := \inf\{\lambda \ \mid \ x \in U_\lambda\}$.

Поскольку $f^{-1}([0, \frac{1}{2^i}[) \subset V_i$, имеем

$$f^{-1}(0) = \bigcap_i f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2^i}\right[\right) \subset \bigcap_i V_i = A.$$

Мы доказали, что A – это нуль-множество.

Теорема Урысона о метризации

Теорема Урысона: Пусть M – нормальное, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Тогда существует непрерывное, инъективное вложение $M \overset{\Phi}{\hookrightarrow} [0,1]^{\mathbb{N}}$ в счетное произведение отрезков. Более того, Φ является гомеоморфизмом M на его образ.

Замечание: Поскольку Φ задает гомеоморфизм M и подмножества метрического пространства (тихоновский куб гомеоморфен гильбертову), **из теоремы Урысона следует, что M метризуемо.**

Замечание: Нормальные, хаусдорфовы пространства со счетной базой называются **польскими**. Из теоремы Урысона следует, что **любое польское пространство метризуемо.**

Замечание: В польском пространстве выполнена аксиома T6, как мы только что доказали. Поэтому **любое замкнутое подмножество польского пространства является нуль-множеством.**

Доказательство теоремы Урысона.

Пусть $\{U_i\}$ – счетная база топологии M, а $A_i := M\backslash U_i$. Тогда A_i – нуль-множества. **Возьмем $f_i : M \longrightarrow [0,1]$, такая, что $f_i^{-1}(0) = A_i$.** Рассмотрим отображение из M в тихоновский куб:

$$M \xrightarrow{\prod_i f_i} [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

Шаг 1. Докажем, что $\Phi := \prod_i f_i$ – вложение. Поскольку U_i это база хаусдорфовой топологии, для любых двух точек $x \neq y$ существует A_i, которое содержит x и не содержит y. Тогда $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Шаг 2. Докажем, что $\Phi := \prod_i f_i$ – гомеоморфизм на его образ. Для этого нужно, чтобы любое открытое множество в M получалось как прообраз $\Phi^{-1}(U)$, для какого-то открытого $U \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$.

Достаточно доказать это для всех открытых множеств U_i из базы. Поскольку $U_i = f_i^{-1}(]0,1])$, имеем

$$U_i = \Phi^{-1}([0,1] \times [0,1] \times \cdots \times]0,1] \times [0,1] \times \cdots \subset [0,1]^{\mathbb{N}})$$

Это множество открыто в $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Топология, лекция 8: Компакты

Миша Вербицкий

10 марта, 2008

Независимый Университет

Компакты в хаусдорфовом пространстве.

Определение: Топологическое пространство M называется **компактным**, если каждое открытое покрытие M имеет конечное подпокрытие.

Замечание: Замкнутое подмножество компакта очевидно компактно. Обратное, вообще говоря, неверно.

Утверждение:
Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Доказательство: Пусть $X \subset M$ – компактное подмножество, а z – точка его замыкания, которая не лежит в Z. Найдем у каждой точки $x \in X$ окрестность $U_x \ni x$, замыкание которой $\overline{U_x}$ не содержит z. Выберем из U_x конечное подпокрытие. Воспользуемся

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i},$$

получим, что $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ замкнуто и не содержит z.

Компактность и секвенциальная компактность.

Определение: Топологическое пространство M называется **секвенциально компактным**, если каждая последовательность $\{x_i\}$ в M имеет **предельную точку** (точку, в любой окрестности которой содержится бесконечное количество членов $\{x_i\}$).

Замечание: Пусть M – компактное топологическое пространство. Из компактности легко выводится, что **последовательность вложенных, непустых, замкнутых подмножеств**

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

всегда имеет непустое пересечение.

Замечание: **Из компактности следует секвенциальная компактность.** Действительно, пусть $\{x_i\}$ – последовательность точек M, R_n – множество $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$, а $\overline{R_n}$ – его замыкание. Тогда пересечение $\bigcap_i \overline{R_i}$ непусто. Ясно, что это пересечение состоит из предельных точек последовательности $\{x_i\}$.

Компактность и секвенциальная компактность (продолжение).

Замечание: **Любая непрерывная функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ на секвенциальном компакте принимает максимум и минимум.**

$\boxed{\text{компактность}} \Rightarrow \boxed{\text{секвенциальная компактность}} \Rightarrow \boxed{\text{непрерывные функции достигают минимума и максимума}}$

Замечание: Для метрических пространств, секвенциальная компактность равносильна обычной (теорема Гейне-Бореля).

Компакты и нормальные пространства

Теорема: Пусть M – компактное, хаусдорфово топологическое пространство. Тогда M нормально.

Доказательство.
Шаг 1. Докажем, что в M выполнена аксиома Т3, то есть для каждого замкнутого множества $A \subset M$, и точки $x \notin A$, существуют непересекающиеся окрестности A и x.

Для всех $z \in A$, выберем окрестность $U_z \ni z$, замыкание которой $\overline{U_z}$ не содержит x. Выберем в покрытии $\{U_z\}$ конечное подпокрытие U_i. **Замыкание $\bigcup U_i$ равно $\bigcup \overline{U_i}$, не содержит z.**

Шаг 2. Тот же аргумент позволяет вывести из Т3 и компактности Т4. Пусть A и B – два непересекающихся замкнутых подмножества M. У каждой точки $z \in A$ есть окрестность U_z, замыкание которой не пересекается с B, в силу Т3. Выберем в покрытии $\{U_z\}$ конечное подпокрытие U_i. **Замыкание $\bigcup U_i$ равно $\bigcup \overline{U_i}$ и не пересекается с B.**
Поэтому M нормально.

Вложения компактов.

Чрезвычайно важное наблюдение. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение. Тогда образ компактного подмножества X компактен.

Следствие: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное вложение хаусдорфовых топологических пространств, причем X – компакт. Рассмотрим образ $f(X) \subset Y$ как топологическое пространство, с индуцированной топологией. Тогда f – это вложение.

Доказательство: Образ компакта компактен, значит, образ замкнутого множества замкнут, открытого – открыт.

Следствие: Из нормальности компакта и леммы Урысона следует, что **любой хаусдорфов компакт гомеоморфен подмножеству тихоновского куба**.

Павел Сергеевич Александров
(1896 - 1982)