9. Топология, лекция 9: Произведение компактов

9.1. Открытые, замкнутые, собственные отображения

Определение 9.1. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение топологических пространств. Отображение f называется **собственным**, если прообраз любого компакта – компакт, **открытым**, если образ любого открытого множества открыт, из **замкнутым**, если образ любого замкнутого множества замкнут.

Замечание 9.2. Основной пример собственного отображения – непрерывное отображение из компакта X в хаусдорфово топологическое пространство Y. Действительно, прообраз компактного (следовательно, замкнутого) подмножества Y замкнут в X, то есть компактен.

Кроме того, это отображение замкнуто. Действительно, любое замкнутое подмножество X компактно, образ компакта компактен, а компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Замечание 9.3. Пример открытого отображения. Для любых топологических пространств X и Y, проекция $X \times Y \xrightarrow{\pi} Y$ открыта. Для проверки этого, достаточно убедиться, что $\pi(W)$ открыт для любого множества из базы топологии на $X \times Y$. Выбрав базу из множеств вида $U \times V$, где U, V открыты в X, Y, мы получим что $\pi(W) = V$ открыто.

Задача 9.4. Приведите пример непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, которое

- замкнуто, но не открыто
- открыто, но не замкнуто

Замечание 9.5. Компактность топологического пространства M равносильно следующему свойству (докажите). Пусть $\{A_\alpha\}$ – набор замкнутых подмножеств M, такой, что любое конечное подмножество $A_1, A_2, ..., A_n \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Тогда все A_i имеют общую точку. Действительно, $\bigcap_\alpha A_\alpha = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\{M \backslash A_\alpha\}$ – покрытие M.

Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение Напомним, что для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ называется **слоем** f.

Теорема 9.6: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – замкнутое, непрерывное отображение, причем все слои f компактны. Тогда f – собственное.

Доказательство: Пусть $K \subset Y$ – компакт. Для доказательства 9.6, достаточно убедиться, что $f^{-1}(K)$ – компакт. Заменив Y на K, а X на $f^{-1}(K)$, можно считать Y компактом.

Шаг 1: Пусть $\{A_\alpha\}$ – набор замкнутых подмножеств в X такой, что любое конечное подмножество $A_1, A_2, ..., A_n \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Добавив к $\{A_\alpha\}$ все конечные пересечения элементов $\{A_\alpha\}$, получим набор замкнутых подмножеств X, обладающий тем же свойством. Будем считать, что $\{A_\alpha\}$ содержит все конечные пересечения своих элементов.

Шаг 2: Поскольку Y компактно, а все $f(A_\alpha)$ замкнуты, $\{f(A_\alpha)\}$ имеет общую точку $y \in Y$ (докажите).

Шаг 3: Рассмотрим слой $f^{-1}(y) \subset X$. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n \subset \{A_\alpha\}$. Любое конечное пересечение $\bigcap_i A_i$ лежит в наборе $\{A_\alpha\}$, а $f(A_\alpha) \ni y$ для всех α. Значит, $\bigcap_i A_i$ пересекается с $f^{-1}(y)$. Мы получили, что любое конечное подмножество набора $\{A_\alpha \cap f^{-1}(y)\}$ имеет общую точку. Поскольку $f^{-1}(y)$ компактен, из этого следует, что набор $\{A_\alpha \cap f^{-1}(y)\}$ имеет общую точку. Это доказывает Теорему 9.6. ■

9.2. Конечные произведения компактов

Теорема Тихонова утверждает, что любое (даже бесконечное) произведение компактов компактно. Для бесконечных произведений, ее доказательство требует аксиомы выбора. Как доказал Джон Келли (John L. Kelley) в 1950-м году, теорема Тихонова равносильна аксиоме выбора.

Для конечных произведений, аксиома выбора не нужна, и компактность произведения компактов можно доказать непосредственно. К сожалению, доказательство получается чуть более сложным.

Пусть X, Y – компакты, а $\pi: X \times Y \longrightarrow Y$ – проекция. Слои π гомеоморфны X, и поэтому компактны. Таким образом, компактность произведения $X \times Y$ вытекает из Теоремы 9.6, и следующего утверждения.

Утверждение 9.7: Пусть X, Y – топологические пространства, причем X компактно, а $\pi: X \times Y \longrightarrow Y$ – проекция. Тогда отображение π замкнуто.

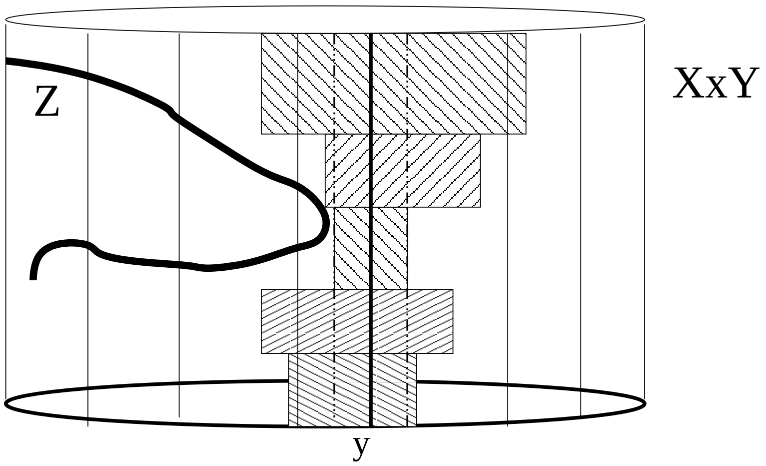
Доказательство: Пусть $Z \subset X \times Y$ – замкнутое подмножество, а y – предельная точка множества $\pi(Z)$. Точка y лежит в $\pi(Z)$ тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(y) \cap Z \neq \emptyset$. Если $\pi(Z)$ незамкнуто, для какой-то предельной точки имеем $\pi^{-1}(y) \cap Z = \emptyset$.

В этом случае, у каждой точки $(x, y) \in \pi^{-1}(y)$ есть окрестность $U_{x,y}$, не пересекающаяся с Z. Выбрав $U_{x,y}$ в базе топологии, можно считать, что $U_{x,y} = V_{x,y} \times W_{x,y}$, где $V_{x,y} \subset X$ – окрестность $x \in X$, а $W_{x,y} \subset Y$ - окрестность $y \in Y$.

Множество $\{U_{x,y}\}$ задает покрытие $\pi^{-1}(y)$. Выберем у него конечное подпокрытие $\{V_i \times W_i\}$. Тогда $\{V_i\}$ составляет покрытие X. Поэтому имеем

$$X \times \bigcap_i W_i \subset \bigcup_i V_i \times W_i$$

(проверьте). Следовательно, множество $X \times \bigcap_i W_i$ не пересекает Z. Поэтому y имеет окрестность $\bigcap_i W_i$, не пересекающую $\pi(Z)$, а значит, не является предельной точкой. Мы получили, что $\pi(Z)$ замкнуто. ■



Проекция с компактным слоем замкнута

Замечание 9.8. Если X некомпактно, Утверждение 9.7 неверно. Действительно, рассмотрим проекцию $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, и гиперболу, то есть замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, состоящее из пар $\{(x, y) \mid xy = 1\}$. Легко видеть, что $\pi(Z)$ незамкнуто (докажите).

Сравнивая Утверждение 9.7 и Теорему 9.6, мы получаем, что произведение компактных пространств компактно.

9.3. Максимальные идеалы в кольцах

Все кольца в этой лекции предполагаются коммутативными (с коммутативным умножением) и с единицей (элементом $1 \in R$ таким, что $1 \cdot x = x$ для каждого x).

Напомним, что **идеалом** в кольце R называется подмножество $I \subset R$, которое является подгруппой по сложению, и к тому же удовлетворяет следующему. Для каждого $x \in R, \gamma \in I$, произведение $x\gamma$ также лежит в I. Это свойство записывается так: $RI \subset I$.

Напомним, что **гомоморфизмом колец** называется отображение $R_1 \xrightarrow{\varphi} R_2$, которое переводит 1 в 1, 0 в 0, и согласовано со сложением (то есть удовлетворяет $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$).

Ядром гомоморфизма $R_1 \xrightarrow{\varphi} R_2$ называется множество всех элементов R_1, переходящих в 0.

Легко видеть, что ядро гомоморфизма – идеал (проверьте). Для каждого идеала $I \subset R$, факторгруппа R/I наделяется естественной структурой кольца (проверьте). Таким образом, идеалы в кольце – подмножества, которые могут быть ядром гомоморфизма $R \longrightarrow R_1$.

Определение 9.9. Пусть R – кольцо, а $S \subset R$ – набор элементов R. Рассмотрим множество $I \subset R$, состоящее из всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i,$$

где $s_i \in S$, а $\lambda_i \in R$. Легко видеть, что I это идеал. Этот идеал называеся **идеалом, порожденным элементами** S.

Замечание 9.10. Пусть $r \in R$ – любой элемент, а rR – порожденное им подмножество R. Легко видеть, что $rR \neq R$ тогда и только тогда, когда когда r не обратим[1] в R (проверьте это).

Поэтому любое кольцо R, в котором любой идеал равен R либо 0, является полем (докажите).

Определение 9.11. Пусть R – кольцо, а $I \subsetneq R$ – идеал. Идеал I называется **максимальным**, если не существует идеала I_1 с $I \subsetneq I_1 \subsetneq R$.

Утверждение 9.12: Идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I – поле.

Доказательство: Легко видеть, что идеалы $I_1 \supset I$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с идеалами кольца R/I (проверьте это). Отсутствие идеалов $I \subsetneq I_1 \subsetneq R$ равносильно тому, что в R/I любой идеал равен 0 либо R. В силу Замечания 9.10, это равносильно тому, что R/I – поле. ■

Определение 9.13. Напомним, что идеал $I \subset R$ кольца R называется **простым**, если для любых $x, y \in R$, из $xy \in I$ следует, что $x \in I$ либо $y \in I$.

Задача 9.14. Докажите, что любой максимальный идеал – простой.

Напомним, что набор подмножеств $S_1 \subset 2^M$ называется **монотонным**, или **вложенным**, если для любых $p, q \in S_1$, либо $p \subset q$, либо $q \subset p$. **Максимальным элементом** набора подмножеств $S \subset 2^M$ называется такой элемент $s \in S$, что для любого $r \in S$, из $r \supset s$ следует $r = s$.

Напомним, что лемма Цорна (Zorn's Lemma) – следующее утверждение теории множеств, равносильное аксиоме выбора. Пусть $S = \{S_\alpha\} \subset 2^M$ – набор подмножеств множества M, которые удовлетворяют такому свойству: для любого монотонного поднабора $\{S_\beta\} \subset S$, объединение $\bigcup_\beta S_\beta$ тоже лежит в S. Тогда в S есть максимальный элемент.

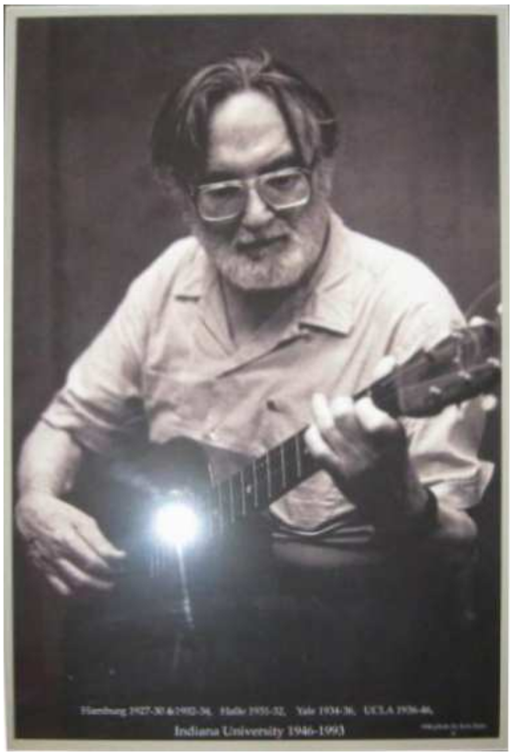
Из леммы Цорна немедленно следует существование максимальных идеалов.

Теорема 9.15: Пусть $I \subsetneq R$ – идеал в кольце. Тогда существует максимальный идеал $I_1 \supset I$.

Доказательство: Пусть $S \subset 2^R$ - множество идеалов, содержащих I, и не равных R. Легко видеть, что для вложенного набора идеалов

[1]Напомним, что $r \in R$ называется **обратимым в кольце** R, если $rr_1 = 1$, для какого-то $r_1 \in R$.

$\{I_\alpha\} \subset S$, объединение $\bigcup_\alpha I_\alpha$ – идеал, не равный R. Действительно, объединение любого набора вложенных идеалов - снова идеал (проверьте это). Объединение $\bigcup_\alpha I_\alpha$ равно R, если $1 \in R$ лежит в каком-то из I_α, но это невозможно, потому что $I_\alpha \subsetneq R$. Применив лемму Цорна к $S \subset 2^R$, получим, что в S существует максимальный элемент. Он и будет максимальным идеалом, содержащим I. ■



Max August Zorn
(1906 - 1993)

9.4. Лемма Цорна: история, замечания

Лемма Цорна была доказана Максом Цорном в 1935-м году. Цорн был алгебраистом, учеником Эмиля Артина (Emil Artin). Абстрактная алгебра в 1930-е годы развивалась весьма бурно (трудами Эмми Нетер, Эмиля Артина и Бартеля Ван дер Вардена, среди прочих), но для строгих доказательств приходилось постоянно прибегать к теории множеств. К тому времени эта наука была немало дискредитирована парадоксами. Примерно тогда же, Гедель доказал, что невозможно доказать ее непротиворечивость, и теория множеств оказалась неожиданно шатким фундаментом для математики.

Для доказательства существования максимальных идеалов до Цорна использовалась теорема Цермело о существовании полного порядка на любом множестве (в англоязычной литературе эта теорема известна как "well-ordering principle"). К теореме Цермело математики традиционно относятся с большим недоверием. ("The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?" – шутка, приписываемая Джерри Бонэ).

Цорн предложил строить абстрактную алгебру аксиоматически, не прибегая к сложным конструкциям вроде теоремы Цермело, и предложил лемму Цорна (которую он называл "принципом максимума") в качестве одной из аксиом. Основным (практически единственным) применением этой леммы в алгебре является теорема о существовании максимальных идеалов.

Впрочем, нетрудно доказать, что теорема о существовании максимальных идеалов равносильна аксиоме выбора.

Название "лемма Цорна" впервые использовано американским математиком Джоном Тьюки (John Tukey).

Помимо алгебры, Цорн занимался теорией чисел и функциональным анализом. Среди прочего, ему принадлежит аксиоматическое построение алгебры октав ("octonions", "Cayley numbers"), и доказательство того, что квадрат любого бесконечного множества равномощен этому множеству.

9.5. Кольцо подмножеств и ультрафильтры

Определение 9.16. Пусть $A, B \subset M$ – подмножества M. Определим **симметрическую разность** $A \vartriangle B$ формулой

$$A \vartriangle B := (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

Определение 9.17. Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Мы говорим, что S **замкнут относительно конечных пересечений и симметрических разностей**, если пересечение и симметрическая разность любых элементов S снова лежит в S. Если S замкнуто относительно конечных пересечений и симметрических разностей, и к тому же содержит M, мы говорим, что S – **кольцо подмножеств** M.

Замечание 9.18. Лего видеть, что 2^M является кольцом.

Определение 9.19. Пусть $\nu \subset M$ - подмножество M. Рассмотрим функцию $\chi_\nu : \ M \longrightarrow \{0,1\}$, ставящую в соответствие точке $x \in \nu$ 1, а $x \notin \nu$ – 0. Эта функция называется **характеристической функцией** подмножества $\nu \subset M$. Отождествив $\{0,1\}$ с полем $\mathbb{F}_2$ остатков по модулю 2, можно считать, что χ_ν – функция со значениями в $\mathbb{F}_2$.

Эта конструкция отождествляет 2^M с множеством функций

$$M \longrightarrow \{0,1\}.$$

В дальнейшем, мы будем отождествлять подмножества и соответствующие им характеристические функции.

Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Для каждого $a \in S$, рассмотрим его характеристическую функцию $\chi_a : \ M \longrightarrow \mathbb{F}_2$. Такие функции можно складывать и умножать почленно.

Утверждение 9.20: Множество функций

$$R_S := \{\chi_a : \ M \longrightarrow \mathbb{F}_2 \mid a \in S\}$$

образует кольцо относительно почленного сложения и умножения тогда и только тогда, когда S – кольцо подмножеств M.

Доказательство: Для любых $\nu, \rho \subset M$, имеем

$$\chi_\nu + \chi_\rho = \chi_{\nu \triangle \rho}, \quad \chi_\nu \cdot \chi_\rho = \chi_{\nu \cap \rho},$$

поэтому замкнутость S относительно конечных пересечений и симметрических разностей равносильна замкнутости R_S относительно сложения и умножения. Наличие в этом множестве нуля очевидно, потому что $X \triangle X = \emptyset$, а $\chi_\emptyset$ равно нулю. Наличие в этом множестве единицы следует из того, что $M \in S$, а $\chi_M = 1$. ■

Мы построили арифметические операции (сложение, умножение) на любом кольце подмножеств $S \subset 2^M$.

Замечание 9.21. Теорема о существовании максимальных идеалов, будучи примененной к кольцу подмножеств, дает сюрьективный гомоморфизм колец $R_S \longrightarrow k$, где k – некоторое поле. Легко видеть, что все элементы R_S удовлетворяют $a^2 = a$ (такие элементы называются **идемпотентами**. Поэтому все элементы k – тоже идемпотенты. Согласно теореме Безу, многочлен $P(x)$ степени i имеет не больше i корней в поле k (докажите это). Поскольку все элементы k являются корнями квадратного многочлена $x^2 - x = 0$, k – поле из двух элементов.

Замечание 9.22. Пусть $I \subset R \subset 2^M$ – максимальный идеал в кольце подмножеств, $\varphi: \ R \longrightarrow \mathbb{F}_2$ – проекция $R \longrightarrow R/I$, а $A \in R$ – какой-то элемент. Поскольку $\chi_M = 1$, A либо $M\backslash A$ принадлежит I. Действительно, если A не принадлежит I, то $\varphi(A) = 1$, а значит

$$\varphi(M\backslash A) = 1 - \varphi(A) = 0.$$

Определение 9.23. Пусть M – множество, 2^M – кольцо всех подмножеств M, а I – максимальный идеал в 2^M. **Ультрафильтром** на M называется множество всех $X \subset M$, не лежащих в I.

Определение 9.24. Пусть $x \in M$ – точка. Рассмотрим гомоморфизм $2^M \longrightarrow \mathbb{F}_2$, ставящий функции $\chi: \ M \longrightarrow \mathbb{F}_2$ ее значение $\chi(x)$. Ядро этого отображения, очевидно, максимальный идеал. Дополнение к такому идеалу называется **главным ультрафильтром**. Главный ультрафильтр состоит из множества всех $X \subset M$, содержащих x:

$$\bigcap_{B \notin I} B = \{x\}, \quad \bigcap_{A \in I} A = M\backslash\{x\}$$

(последнее равенство следует из того, что $A \in I \Leftrightarrow (M\backslash A) \notin I$, что ясно из Замечания 9.22).

Замечание 9.25. Многие математики считают, что понятие ультрафильтра парадоксально, и использовать ультрафильтры не следует, наравне с теоремой Цермело и другими экзотическими следствиями аксиомы выбора. Действительно, ультрафильтры, кроме главных, невозможно построить явно. Если у вас понятие ультрафильтра вызывает отторжение, пропустите конец этого раздела, и забудьте про ультрафильтры.

Ультрафильтры можно определить аксиоматически, что видно из следующей задачи.

Задача 9.26. Пусть M – множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ – набор его подмножеств. Докажите, что следующие утверждения равносильны.

(i) $\mathcal{U}$ это ультрафильтр.

(ii) Выполнены следующие свойства.

A. если $A \subset B$, $A \in \mathcal{U}$, то $B \in \mathcal{U}$.

B. Для любого $A \subset M$, либо A, либо $M \backslash A$ лежат в $\mathcal{U}$ (но не одновременно).

C. Если $A, B \in \mathcal{U}$, то $A \cap B \in \mathcal{U}$.

Ультрафильтры были введены в 1937-м году Анри Картаном, одним из основателей Бурбаки, и широко использовались в трактатах Николя Бурбаки.

Henri Cartan, 1996
(род. 8 июля 1904)

Замечание 9.27. Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств. Рассмотрим идеал в 2^M, порожденный S. Он равен 2^M тогда и только тогда, когда M можно получить как объединение конечного поднабора в S (докажите).

Пусть теперь $S = \{X_\alpha\} \subset 2^M$ – набор подмножеств M таких, что $\bigcup_\alpha X_\alpha = M$, но никакое конечное подмножество S не дает в объединении M. Так, к примеру, если $M = \mathbb{Z}$, можно взять в качестве S множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}$.

Идеал, порожденный S, не равен M в силу Замечания 9.27. Поэтому он содержится в некотором максимальном идеале I. Поскольку

$$\bigcup_{A\in I} A \subset \bigcup_{\alpha} X_\alpha = M,$$

этот ультрафильтр не главный.

Определение 9.28. **Аддитивной мерой** на кольце множеств $S \subset 2^M$ называется отображение $\mu: \ S \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ такое, что $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых непересекающихся множеств $A, B \in S$.

Задача 9.29. Пусть $\mathcal{U} \subset 2^M$ – некоторое подмножество. Рассмотрим отображение $\mu: \ 2^M \longrightarrow \{0,1\}$, переводящее A в 1, если $A \in \mathcal{U}$, и в 0, если $A \notin \mathcal{U}$. Докажите, что μ является аддитивной мерой тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}$ – ультрафильтр.

Ультрафильтры придумал Анри Картан, в 1937-м году, следуя идеям Клода Шевалле, хотя Шевалле впоследствии отказался от всех прав на это изобретение. Учебники Бурбаки по основам топологии (в целом, весьма неудачные) используют ультрафильтры и многие другие экзотические конструкции, после них практически не употреблявшиеся. В отличие от других изобретений Бурбаки, которые вообще никому не понадобились, понятие ультрафильтра оказалось полезно в логике, общей топологии и некоторых разделах алгебры.

9.6. Теорема Александера о предбазе

Утверждение 9.30: Пусть M – топологическое пространство, а $\mathcal{V} \subset 2^M$ – покрытие M. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{V}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

(i) Из $\mathcal{V}$ можно выбрать конечное подпокрытие

(ii) $I = 2^M$.

Доказательство: Если $U_1, ...U_n$ – конечное подпокрытие, то объединение $\bigcup U_i = M$ выражается через пересечения и симметрические разности, а значит, принадлежит I. Мы получаем $1 \in I$, что влечет $I = 2^M$.

Если же $I = 2^M$, имеем

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i,$$

где $\lambda_i \in 2^M$, а $U_i \in \mathcal{V}$. На языке множеств это равенство переписывается

$$M = (\lambda_1 \cap U_1) \vartriangle (\lambda_2 \cap U_2) \vartriangle ... \vartriangle (\lambda_n \cap U_n)$$

Поскольку $A \vartriangle B \subset A \cup B$, имеем

$$M = (\lambda_1 \cap U_1) \vartriangle (\lambda_2 \cap U_2) \vartriangle ... \vartriangle (\lambda_n \cap U_n) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

значит, в $\mathcal{V}$ найдется конечное подпокрытие. ■

Теорема 9.31: (теорема Александера о предбазе, “Alexander subbase theorem”) Пусть M – топологическое пространство с предбазой $\{U_\alpha\}$. Предположим, что любое покрытие M элементами $\{U_\alpha\}$ имеет конечное подпокрытие. Тогда M компактно.

Доказательство: Пусть M некомпактно, и пусть $\mathcal{P}$ – покрытие M, не допускающее конечного подпокрытия. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{P}$. Абзацем выше доказано, что $I \neq 2^M$. Пусть $I_m \subset 2^M$ – максимальный идеал, содержащий I.

Шаг 1. Обозначим за $\mathcal{U}$ множество элементов предбазы $\{U_\alpha\}$, содержащихся в I_m. Докажем, что $\mathcal{U}$ – это покрытие M. Поскольку I_m это идеал, вместе с любым множеством I_m содержит все его подмножества. По условию, I_m содержит открытое покрытие M. Поэтому для для каждой точки $x \in M$, и каждой базы топологии на M найдется элемент базы, который содержит x и содержится в I_m. Взяв в качестве базы конечные пересечения U_α, мы получим

$$x \in \bigcap_i U_i \in I_m,$$

где U_i лежат в предбазе. Получаем $\bigcap_i U_i \in I_m$. Поскольку I_m максимальный идеал, I_m – простой идеал. Значит, из $\bigcap_i U_i \in I_m$ следует, что хотя бы один из U_i лежит в I_m. Мы получили, что $x \in U_i \in \mathcal{U}$. Значит, $\mathcal{U}$ – покрытие.

Шаг 2. На предыдущем шаге, мы получили, что $\mathcal{U}$ – покрытие M элементами предбазы. Поскольку $I_m \neq 2^M$, а $\mathcal{U} \subset I_m$. никакой конечный набор элементов $\mathcal{U}$ не дает в объединении M. Мы пришли к противоречию с условиями теоремы Александера о предбазе. Следовательно, M компактно. ■

James Waddell Alexander
(1888 - 1971)

Замечание 9.32. Отметим, что теорема Александера о предбазе влечет теорему Тихонова о компактности произведения (об этом ниже). Поэтому она равносильна аксиоме выбора.

Американский математик Джеймс Александер прославился в основном как один из основателей современной алгебраической топологии. Ему принадлежит изобретение симплициальных пространств и когомологий. Кроме того, Александер изучал теорию узлов, и немало ее развил. Он изобрел группу кос, и определил инвариант узлов, который сейчас называется его именем (инвариант Александера).

Александер происходил из очень влиятельной американской семьи и был миллионером. Несмотря на это, он был чрезвычайно левых взглядов. Когда в 1950-х годах в Америке начались гонения на социалистов, Александер стал одной из громких жертв преследований; в 1951-м году Александеру пришлось уйти из Принстонского Университета и Institute of Advanced Studies, где он работал. Александер дожил до 1971-го года фактическим отшельником, не появляясь на людях. Единственное публичное выступление Александера случилось в 1954-м году - он подписал открытое письмо в защиту физика Роберта Оппенгеймера, директора Манхэттенского проекта, которого в 1954-м году выгнали с работы за политику.

Также Александер был знаменитым альпинистом.

9.7. Теорема Тихонова о компактности

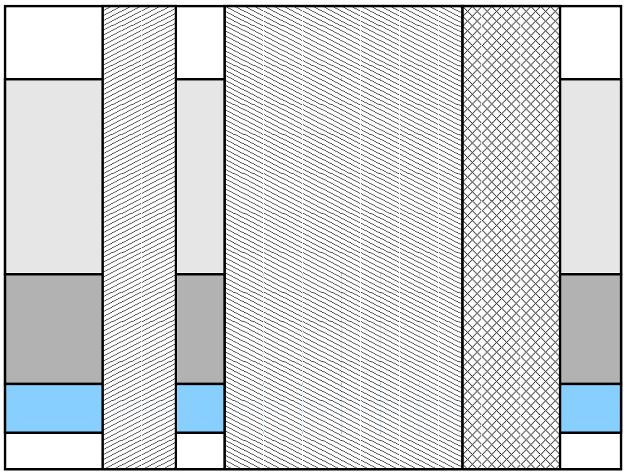
Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор множеств. Рассмотрим объединение всех этих множеств (которые считаются непересекающимися). Оно обозначается $\coprod M_\alpha$.

Определение 9.33. Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор топологических пространств, проиндексированный множеством индексов $\mathfrak{I}$. Напомним, что **произведение** M_α это множество отображений из $\mathfrak{I}$ в $\coprod M_\alpha$, ставящих в соответствие каждому индексу $\alpha \in \mathfrak{I}$ точку пространства M_α. На $\prod_\alpha M_\alpha$ вводится **тихоновская топология**, заданная следующей предбазой. Для каждой пары $\alpha \in \mathfrak{I}$, и открытого множества $U \subset M_\alpha$, рассмотрим подмножество

$$M_{\alpha_1} \times ... \times U_\alpha \times ... \subset M_{\alpha_1} \times ... \times M_\alpha \times ...$$

(произведение набора $\{M_\alpha\}$, где элемент M_α заменили на U_α, а все остальные оставили как есть). Обозначим это подмножество за $\mathcal{F}_{\alpha,U}$. Топология, заданная такой предбазой, называется **тихоновской топологией**, или **топологией произведения**.

Теорема 9.34: (теорема Тихонова о компактности) Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор компактных топологических пространств. Тогда $\prod_\alpha M_\alpha$ тоже компактно.



Элементы предбазы, покрывающие часть произведения $M_1 \times M_2$

Доказательство: Теорема Тихонова сразу следует из теоремы Александера о предбазе. Пусть $\{\mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}}\}$ – набор элементов предбазы. Легко видеть, что

$$\bigcup_{\alpha,\xi} \mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha,W_\alpha},$$

где $W_\alpha = \bigcup_\xi U_{\alpha,\xi}$. Если для всех α, $W_\alpha \neq M_\alpha$, выберем точку $x_\alpha \in M_\alpha \backslash W_\alpha$. Очевидно, точка $\prod_\alpha x_\alpha$ не лежит в $\bigcup_\alpha \mathcal{F}_{\alpha,W_\alpha}$.

Мы получаем, что $\{\mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}}\}$ является покрытием, если и только если $\bigcup_\xi U_{\alpha,\xi} = M_\alpha$, для какого-то α. Это значит, что $U_{\alpha,\xi}$ является открытым покрытием M_α. Поскольку M_α компактно, в $U_{\alpha,\xi}$ есть конечное подпокрытие $U_{\alpha,i}$. Тогда $\mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,i}}$ будет конечным покрытием $\prod_\alpha M_\alpha$. Мы доказали, что из любого покрытия $\prod_\alpha M_\alpha$ элементами предбазы можно выбрать конечное подпокрытие. Теперь из теоремы Александера вытекает, что $\prod_\alpha M_\alpha$ компактно. ■