Топология, лекция 9: Произведение компактов

Миша Вербицкий

17 марта, 2008

Независимый Университет

Открытые, замкнутые, собственные отображения

Определение: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение топологических пространств. Отображение f называется **собственным**, если прообраз любого компакта – компакт, **открытым**, если образ любого открытого множества открыт, из **замкнутым**, если образ любого замкнутого множества замкнут.

Замечание: Непрерывное отображение из компакта X в хаусдорфово топологическое пространство Y **собственно**.

Замечание: Непрерывное отображение из компакта X в хаусдорфово топологическое пространство Y **замкнуто**.

Замечание: Отображение проекции $\pi : X \times Y \longrightarrow Y$ **открыто**.

Определение: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение. Напомним, что для любой точки $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ называется **слоем** f.

Замкнутые отображения с компактными слоями

Теорема: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – замкнутое, непрерывное отображение, причем все слои f компактны. **Тогда f – собственное.**

Доказательство: Пусть $K \subset Y$ – компакт. Достаточно убедиться, что $f^{-1}(K)$ – компакт. Заменив Y на K, а X на $f^{-1}(K)$, **можно считать Y компактом.**

Шаг 1: Компактность M равносильна такому свойству. Пусть $\{A_\alpha\}$ – набор замкнутых подмножеств M, такой, что любое конечное подмножество $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Тогда все A_α имеют общую точку.

Действительно, отсутствие общей точки у $\{A_\alpha\}$ значит, что $\{M \backslash A_\alpha\}$ это покрытие, а наличие общих точек у $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ значит, что в $\{M \backslash A_\alpha\}$ нет конечного подпокрытия.

Замкнутые отображения с компактными слоями (продолжение)

Шаг 2: Пусть $\{A_\alpha\}$ – набор замкнутых подмножеств в X такой, что любое конечное подмножество $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \{A_\alpha\}$ имеет общую точку. Поскольку Y компактно, а все $f(A_\alpha)$ замкнуты, $\{f(A_\alpha)\}$ **имеет общую точку** $y \in Y$**.**

Шаг 3: Добавив к $\{A_\alpha\}$ все конечные пересечения элементов $\{A_\alpha\}$, получим набор замкнутых подмножеств X, обладающий тем же свойством. Поэтому можно считать, что $\{A_\alpha\}$ **содержит все конечные пересечения своих элементов.**

Шаг 4: Пусть $y = \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$. Любое конечное пересечение $\bigcap_i A_i$ лежит в $\{A_\alpha\}$, значит, пересекается с $f^{-1}(y)$. В силу компактности $f^{-1}(y)$, из этого следует, что $\{A_\alpha \cap f^{-1}(y)\}$ **имеет общую точку.**

Мы доказали, что X компактен.

Конечные произведения компактов

Теорема: Пусть X, Y – компакты. Тогда $X \times Y$ – компакт.

Замечание: Эта теорема есть частный случай теоремы Тихонова о компактности произвольных произведений компактов.

Замечание: Произведение секвенциальных компактов компактно.

Легко видеть, что слои проекции $\pi: \ X \times Y \longrightarrow Y$ компактны. Таким образом, **компактность произведения $X \times Y$ вытекает из следующего утверждения.**

Утверждение:
Пусть $\pi: \ X \times Y \longrightarrow Y$ – отображение проекции, причем X компактно. Тогда π замкнуто.

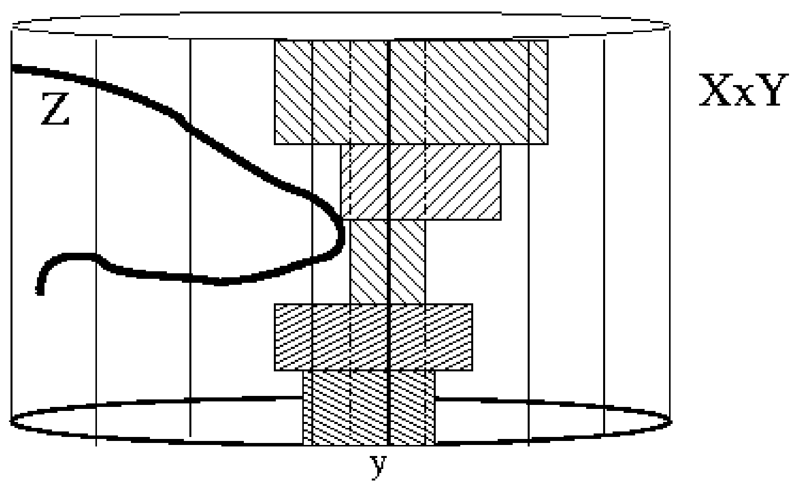
Замечание: Если X некомпактно, это утверждение неверно. Рассмотрим проекцию $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, и гиперболу $Z := \{(x, y) \mid xy = 1\}$. Тогда $\pi(Z)$ незамкнуто.

Замкнутость отображение проекции (доказательство)

Шаг 1. Пусть $Z \subset X \times Y$ – замкнутое подмножество. Если $\pi(Z)$ незамкнуто, для какой-то предельной точки $\pi(Z)$ имеем $\pi^{-1}(y) \cap Z = \emptyset$.

Шаг 2. У каждой точки $(x, y) \in \pi^{-1}(y)$ есть окрестность $U_{x,y} = V_{x,y} \times W_{x,y}$, не пересекающаяся с Z.

Шаг 3. Поскольку $\pi^{-1}(y)$ компактно, можем выбрать конечное покрытие $\{V_i \times W_i\}$ множества $\pi^{-1}(y)$, не пересекающееся с Z.



Шаг 4. Множество $X \times (\bigcap_i W_i)$ не пересекает Z, значит, y не предельная точка $\pi(Z)$.

Идеалы в кольцах

Все кольца в этой лекции предполагаются коммутативными (с коммутативным умножением) и с единицей.

Определение: Идеалом в кольце R называется подмножество $I \subset R$, которое является подгруппой по сложению, и к тому же удовлетворяет следующему. Для каждого $x \in R, \gamma \in I$, произведение $x\gamma$ также лежит в I. Это свойство записывается так: $RI \subset I$.

Определение: Гомоморфизмом колец называется отображение $R_1 \xrightarrow{\varphi} R_2$, которое переводит 1 в 1, 0 в 0, и согласовано со сложением (то есть удовлетворяет $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$).

Определение: Ядром гомоморфизма $R_1 \xrightarrow{\varphi} R_2$ называется множество всех элементов R_1, переходящих в 0.

Замечание: Легко видеть, что **ядро гомоморфизма – идеал.** Для каждого идеала $I \subset R$, факторгруппа R/I наделяется естественной структурой кольца. Таким образом, **идеалы в кольце – подмножества, которые могут быть ядром гомоморфизма $R \longrightarrow R_1$.**

Идеалы в кольце (продолжение)

Определение: Пусть R – кольцо, а $S \subset R$ – набор элементов R. Рассмотрим множество $I \subset R$, состоящее из всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i,$$

где $s_i \in S$, а $\lambda_i \in R$. Легко видеть, что I это идеал. Этот идеал называеся **идеалом, порожденным элементами S.**

Замечание: Пусть $r \in R$ – любой элемент, а rR – порожденное им подмножество R. Легко видеть, что $rR \neq R$ **тогда и только тогда, когда когда r не обратим.**

Из этого немедленно получаем

Утверждение:
Кольцо R, в котором любой идеал равен R либо 0, является полем.

Максимальные и простые идеалы

Определение: Пусть R – кольцо, а $I \subsetneqq R$ – идеал. Идеал I называется **максимальным**, если не существует идеала I_1 с $I \subsetneqq I_1 \subsetneqq R$.

Утверждение: Идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I – поле.

Определение: Пусть R – кольцо, а $I \subsetneqq R$ – идеал. Идеал I называется **простым**, если для любых $x, y \in R$, из $xy \in I$ следует, что $x \in I$ либо $y \in I$.

Определение: Пусть $x, y \in R$ ненулевые элементы кольца R, такие, что $xy = 0$. Тогда x, y называются **делителями нуля**.

Утверждение: Идеал $I \subset R$ прост тогда и только тогда, когда факторкольцо R/I не имеет делителей нуля.

Следствие: Любой максимальный идеал прост.

Лемма Цорна

Определение: Набор подмножеств $S_1 \subset 2^M$ называется **монотонным**, или **вложенным**, если для любых $p, q \in S_1$, либо $p \subset q$, либо $q \subset p$.

Определение: **Максимальным элементом** набора подмножеств $S \subset 2^M$ называется такой элемент $s \in S$, что для любого $r \in S$, из $r \supset s$ следует $r = s$.

Лемма Цорна: Пусть $S = \{S_\alpha\} \subset 2^M$ – набор подмножеств множества M, которые удовлетворяют такому свойству: для любого монотонного поднабора $\{S_\beta\} \subset S$, объединение $\bigcup_\beta S_\beta$ тоже лежит в S. Тогда в S есть максимальный элемент.

«The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?» (шутка)

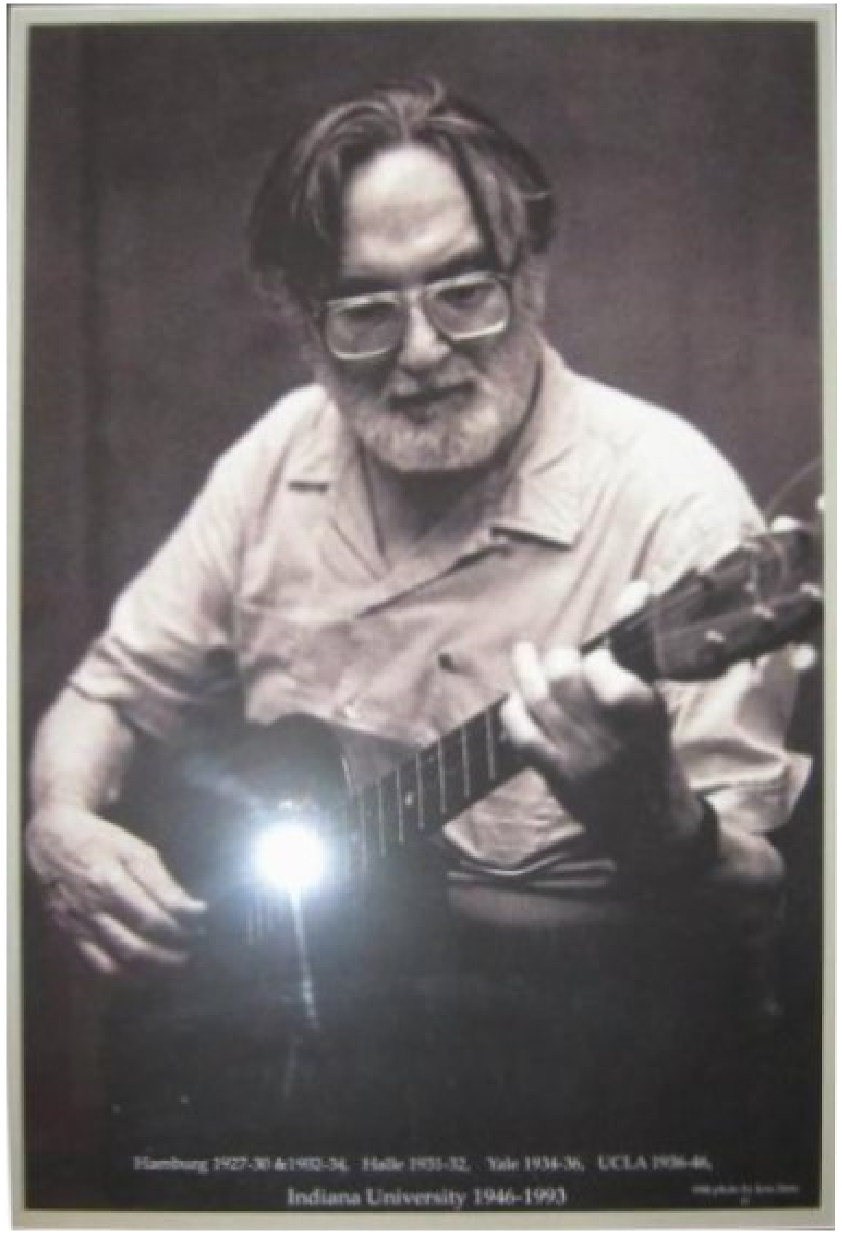
Существование максимальных идеалов

Теорема: **Пусть $I \subsetneq R$ – идеал в кольце. Тогда существует максимальный идеал $I_1 \supset I$.**

Доказательство: Пусть $S \subset 2^R$ - множество идеалов, содержащих I, и не равных R.

Шаг 1: Для вложенного набора идеалов $\{I_\alpha\} \subset S$, **объединение $\bigcup_\alpha I_\alpha$ – идеал, не равный R.** Действительно, объединение $\bigcup_\alpha I_\alpha$ это снова идеал; он равен R, только если 1 лежит в каком-то из I_α.

Шаг 2: Применив к S лемму Цорна, получим максимальный элемент S. **Он будет максимальным идеалом.**



Max August Zorn
(1906 - 1993)

Характеристические функции

Определение: Пусть $\nu \subset M$ - подмножество M. Рассмотрим функцию $\chi_\nu : \ M \longrightarrow \{0,1\}$, ставящую в соответствие точке $x \in \nu$ 1, а $x \notin \nu$ – 0. Эта функция называется **характеристической функцией** подмножества $\nu \subset M$. Отождествив $\{0,1\}$ с полем $\mathbb{F}_2$ остатков по модулю 2, можно считать, что χ_ν – функция со значениями в $\mathbb{F}_2$.

Замечание: Эта конструкция отождествляет 2^M с множеством функций $M \longrightarrow \mathbb{F}_2$.

Определение: Пусть $A, B \subset M$ – подмножества M. Определим **симметрическую разность** $A \triangle B$ формулой

$$A \triangle B := (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Утверждение: При отождествлении подмножества с его характеристической функцией, **произведение переходит в пересечение, сумма в симметрическую разность.** Для любых $\nu, \rho \subset M$, имеем

$$\chi_\nu + \chi_\rho = \chi_{\nu \triangle \rho}, \qquad \chi_\nu \cdot \chi_\rho = \chi_{\nu \cap \rho},$$

Кольцо подмножеств

Определение: Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Говорится, что S **замкнут относительно конечных пересечений и симметрических разностей**, если пересечение и симметрическая разность любых элементов S снова лежит в S.

Определение: Если S замкнуто относительно конечных пересечений и симметрических разностей, и к тому же содержит M, мы говорим, что S – **кольцо подмножеств** M.

Пусть $S \subset 2^M$ – набор подмножеств M. Для каждого $a \in S$, рассмотрим его характеристическую функцию $\chi_a : \ M \longrightarrow \mathbb{F}_2$. Такие функции можно складывать и умножать почленно.

Утверждение: Множество функций

$$R_S := \{\chi_a : \ M \longrightarrow \mathbb{F}_2 \mid a \in S\}$$

образует кольцо относительно поточечного сложения и умножения тогда и только тогда, когда S – кольцо подмножеств M.

Максимальные идеалы в кольце подмножеств:

Утверждение: Пусть $S \subset 2^M$ – кольцо подмножеств, а $I \subset S$ – максимальный идеал. Тогда S/I это поле $\mathbb{F}_2$.

Доказательство.
Шаг 1: Легко видеть, что все элементы R_S удовлетворяют $a^2 = a$ (такие элементы называются **идемпотентами**). Поэтому **все элементы k – тоже идемпотенты.**

Шаг 2: Теорема Безу утверждает, что многочлен $P(x)$ степени i имеет не больше i корней в поле k. **Поскольку все элементы k являются корнями квадратного многочлена $x^2 - x = 0$, k – поле из двух элементов.**

Ультрафильтры

Следствие: Пусть $I \subset 2^M$ – максимальный идеал, а $A \subset M$ – любое подмножество. Тогда **либо A, либо $M \backslash A$ принадлежат I.**

Доказательство: Пусть $I \subset R$ идеал в кольце такой, что $R/I \cong \mathbb{F}_2$. Тогда для каждого $x \in R$, либо x, либо $1 + x$ лежат в I. Теперь воспользуемся $M \backslash A = M \triangle A = 1 + A$.

Определение: Пусть M – множество, 2^M – кольцо всех подмножеств M, а I – максимальный идеал в 2^M. **Ультрафильтром** на M называется множество всех $X \subset M$, не лежащих в I.

Аксиоматическое определение ультрафильтра.
Набор подмножеств $\mathcal{U} \subset 2^M$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда выполнено следующее

1. если $A \subset B$, $A \in \mathcal{U}$, то $B \in \mathcal{U}$.

2. Для любого $A \subset M$, либо A, либо $M \backslash A$ лежат в $\mathcal{U}$ (но не одновременно).

3. Если $A, B \in \mathcal{U}$, то $A \cap B \in \mathcal{U}$.

Henri Cartan, 1996

(род. 8 июля 1904)

Покрытия и идеалы

Утверждение: Пусть M – топологическое пространство, а $\mathcal{V} \subset 2^M$ – покрытие M. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{V}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Из $\mathcal{V}$ можно выбрать конечное подпокрытие

2. $I = 2^M$.

Доказательство: Если $U_1, ...U_n$ – конечное подпокрытие, то объединение $\bigcup U_i = M$ выражается через пересечения и симметрические разности, значит, $M \in I$.

Если же $I = 2^M$, имеем $1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$, где $\lambda_i \in 2^M$, а $U_i \in \mathcal{V}$. Поэтому

$$M = (\lambda_1 \cap U_1)\triangle(\lambda_2 \cap U_2)\triangle...\triangle(\lambda_n \cap U_n) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

значит, в $\mathcal{V}$ найдется конечное подпокрытие.

Теорема Александера о предбазе

Теорема Александера о предбазе: Пусть M – топологическое пространство с предбазой $\{U_\alpha\}$. Предположим, что любое покрытие M элементами $\{U_\alpha\}$ имеет конечное подпокрытие. Тогда M компактно.

Доказательство: Пусть M некомпактно, и пусть $\mathcal{P}$ – покрытие M, не допускающее конечного подпокрытия. Рассмотрим идеал I в 2^M, порожденный $\mathcal{P}$. **Пусть $I_m \subset 2^M$ – максимальный идеал, содержащий I.**

Шаг 1: Обозначим за $\mathcal{U}$ множество элементов предбазы $\{U_\alpha\}$, содержащихся в I_m. **Докажем, что $\mathcal{U}$ – это покрытие M.** По условию, I_m содержит открытое покрытие M. Поэтому для для каждой точки $x \in M$, и каждой базы топологии на M найдется элемент базы, который содержит x и содержится в I_m. Получаем $x \in \bigcap_i U_i \in I_m$, где U_i лежат в предбазе. Поскольку I_m простой идеал, из этого следует, что хотя бы один из U_i лежит в I_m. Мы получили $x \in U_i \in \mathcal{U}$.

Шаг 2: Поскольку $I_m \neq 2^M$, а $\mathcal{U} \subset I_m$, **никакой конечный набор элементов $\mathcal{U}$ не дает в объединении M.** Противоречие с условием теоремы!

James Waddell Alexander
(1888 - 1971)

Тихоновская топология на произведении

Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор множеств. Рассмотрим объединение всех этих множеств (которые считаются непересекающимися). Оно обозначается $\coprod M_\alpha$.

Определение: Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор топологических пространств, проиндексированный множеством индексов $\mathfrak{I}$. **Произведение** M_α это множество отображений из $\mathfrak{I}$ в $\coprod M_\alpha$, ставящих в соответствие каждому индексу $\alpha \in \mathfrak{I}$ точку пространства M_α. Оно обозначается $\prod_\alpha M_\alpha$

Определение: На $\prod_\alpha M_\alpha$ вводится **тихоновская топология**, заданная следующей предбазой. Для каждой пары $\alpha \in \mathfrak{I}$, и открытого множества $U \subset M_\alpha$, рассмотрим подмножество

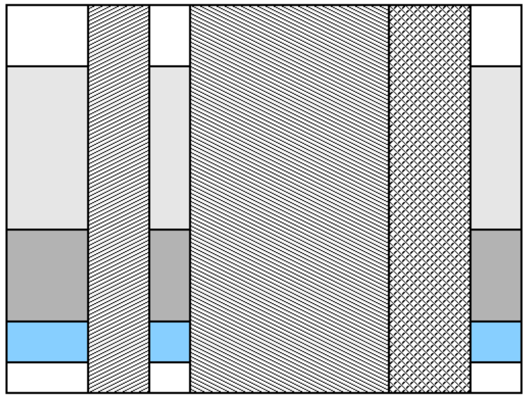
$$M_{\alpha_1} \times ... \times U_\alpha \times ... \subset M_{\alpha_1} \times ... \times M_\alpha \times ...$$

(произведение набора $\{M_\alpha\}$, где элемент M_α заменили на U_α, а все остальные оставили как есть). Обозначим это подмножество за $\mathcal{F}_{\alpha,U}$. Топология, заданная такой предбазой, называется **тихоновской топологией**, или **топологией произведения**.

Теорема Тихонова о компактности

Теорема Тихонова о компактности:
Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор компактных топологических пространств. Тогда $\prod_\alpha M_\alpha$ тоже компактно.

Доказательство: Применим теорему Александера о предбазе.



Пусть $\{\mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}}\}$ – набор элементов предбазы. Легко видеть, что

$$\bigcup_{\alpha,\xi} \mathcal{F}_{\alpha,U_{\alpha,\xi}} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha,W_\alpha},$$

где $W_\alpha = \bigcup_\xi U_{\alpha,\xi}$. Поэтому для какого-то α, $W_\alpha = M_\alpha$. Выбрав из $U_{\alpha,\xi}$ конечное подпокрытие U_i, получим, что $\mathcal{F}_{\alpha,U_i}$ - конечное покрытие $\prod_\alpha M_\alpha$.