Экзамен по курсу "Основы кэлеровой геометрии", весна 2008. Для сдачи экзамена нужно решить любые 9 из 19-ти задач.

Основы кэлеровой геометрии: задачи для экзамена

Задача 1.1. Пусть (M, ω) – компактное кэлерово многообразие размерности n, а

$$e^f \omega^n = (\omega + dd^c\phi)^n$$

решение уравнения Монжа-Ампера. Докажите, что $\omega + dd^c\phi$ кэлерово.

Задача 1.2. Пусть (M, ω) – компактное кэлерово многообразие размерности n. Рассмотрим уравнение

$$e^f \omega^n = (\omega + dd^c\phi)^{n-i}\omega^i$$

Докажите, что решение единственно.

Определение 1.1. **Распределение** на многообразии – это $\mathbb{C}^\infty M$-инвариантный подпучок в касательном пространстве TM. Распределение F называется **интегрируемым**, если задано замкнутое подмножество меры нуль $Z \subset M$ приче, $M \backslash Z$ допускает открытое покрытие $\{U_i\}$, а каждое U_i представляется в виде произведения $U_i = V_i \times W_i$, причем $F\Big|_{U_i}$ – ядро дифференциала проекции $U_i \xrightarrow{\pi_i} W_i$. **Листом слоения** называется иммерсия $X \xrightarrow{j} M$ из связного многообразия X в M такая, что

$$j(X) \cap U_i = \pi_i^{-1}(S),$$

где $S \subset W_i$ счетно. Слоение называется **голоморфным**, если M комплексное многообразие, а $U_i \xrightarrow{\pi_i} W_i$ комплексно аналитично.

Задача 1.3. Пусть – комплексное многообразие, а $F \subset TM$ – когерентный подпучок. Предположим, что коммутатор любых векторных полей $f_1, f_1 \in F$ удовлетворяет $[f_1, f_2] \in F$. Докажите, что соответствующее распределение интегрируемо и голоморфно.

Задача 1.4. Пусть (M, I) – комплексное многообразие, а $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ – вещественно аналитическая форма, удовлетворяющая $\omega(x, Ix) \geqslant 0$ для любого $x \in TM$. Рассмотрим подпучок $F \subset TM$, состоящий из всех x таких, что $\omega(x, Ix) = 0$ (такой подпучок называется **нуль-пространством** ω). Докажите, что F интегрируемо и все его слои – комплексные подмногообразия. Всегда ли оно голоморфно?

Задача 1.5. Пусть (M, I) – комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $U \subset M$ – плотное, открытое подмножество, а а $\Omega \in \Lambda^{n,0}(U)$ – невырожденная $(n,0)$-форма. Предположим, что Ω замкнута. Докажите, что почти комплексная структура I интегрируема.

Задача 1.6. Пусть (M, I, ω) – эрмитово почти комплексное многообразие, а ∇ – связность с тотально антисимметричным кручением, сохраняющая I, ω. Следует ли из существования такой связности интегрируемость I?

Задача 1.7. В условиях предыдущей задачи, следует ли из существования такой связности интегрируемость I, если $d\omega = 0$?

Определение 1.2. Пусть M - вещественное многообразие, $\dim M = 2n-1$. Форма $\theta \in \Lambda^1 M$ называется **контактной**, если $\theta \wedge (d\theta)^{n-1} \in \Lambda^{2n-1} M$ нигде не обращается в 0.

Определение 1.3. Функция $\phi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ на комплексном многообразии называется **строго плюрисубгармонической**, если $dd^c\phi$ кэлерова.

Задача 1.8. Пусть $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ – строго плюрисубгармоническая функция на комплексном многообразии, а $c \in \mathbb{R}$ – такое число, что множество уровня $X_c := \phi^{-1}(c) \subset M$ гладко. Докажите, что $d^c\phi$ – контактная форма на X_c.

Задача 1.9. Пусть M компактное комплексное многообразие, а $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ – замкнутая $(1,1)$-форма, удовлетворяющая $\omega(x, Ix) \geqslant 0$ для любого $x \in TM$. Предположим, что ω невырождена вне конечного набора точек. Докажите, что M кэлерово (допускает кэлерову форму).

Определение 1.4. Пусть $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ – линейный оператор, все собственные значения которого удовлетворяют $|\alpha_i| > 1$. Рассмотрим циклическую группу $\langle A \rangle \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{C}^n)$, порожденную A, и пусть $H_A = (\mathbb{C}^n \backslash 0)/\langle A \rangle$. Это комплексное многообразие называется **линейное многообразие Хопфа**.

Задача 1.10. Докажите, что линейное многообразие Хопфа H_A некэлерово для любого $n > 1$.

Задача 1.11. Докажите, что H_A содержит эллиптическую кривую.

Задача 1.12. Пусть H_A – двумерное многообразие. Докажите, что каноническое расслоение $K(H_A)$ не изоморфно тривиальному расслоению $\mathcal{O}_{H_A}$ (структурному пучку). Докажите, что $K(H_A)$ тривиально как топологическое расслоение.

Задача 1.13. Пусть H – трехмерная группа Гейзенберга, то есть группа вещественных верхнетреугольных матриц 3 на 3. Обозначим за $H_{\mathbb{Z}} \subset H$ подгруппу, состоящую из матриц с целыми коэффициентами. Постройте комплексную структуру на компактном 4-мерном многообразии $H/H_{\mathbb{Z}} \times S^1$. Может ли оно быть кэлеровым?

Задача 1.14. Пусть M – риччи-плоское, компактное многообразие, а θ – гармоническая 1-форма на M. Докажите, что $\nabla\theta = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита.

Задача 1.15. Пусть M – компактное риманово многообразие. Докажите, что группа изометрий M компактна.

Задача 1.16. Пусть M – компактное многообразие Калаби-Яу. Докажите, что группа комплексно-аналитических автоморфизмов M компактна.

Задача 1.17. Пусть (M, I) комплексное многообразие, снабженное связностью без кручения ∇, причем $\nabla I = 0$, а $X \in TM$ – векторное поле. Докажите, что X голоморфно тогда и только тогда, когда $\nabla X \in \Lambda^1(M) \otimes TM$, рассмотренное как эндоморфизм TM, комплексно линейно.

Задача 1.18. Пусть M – псевдориманово многообразие сигнатуры (p, q) (многообразие с невырожденной билинейной симметрической формой g сигнатуры (p, q)). Докажите, что на M существует и единственна связность без кручения, сохраняющая g (такая связность называется **связность Леви-Чивита**).

Задача 1.19. Пусть M – псевдориманово многообразие сигнатуры (p, q), $p \neq q$, а голономия связности Леви-Чивита приводима. Докажите, что M локально разлагается в произведение псевдоримановых многообразий меньшей размерности.