1. Кэлерова геометрия, лекция 1: Почти комплексные многообразия

1.1. Почти комплексные многообразия

Предполагается известным определение комплексного многообразия, и p, q-разложение на дифференциальных формах: $\Lambda^*(M, \mathbb{C}) = \oplus \Lambda^{p,q}(M)$. Также разложение $TM \otimes \mathbb{C} \cong T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M)$.

Определение 1.1. Пусть M - гладкое многообразие, а $I: TM \longrightarrow TM$ - оператор, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{\mathsf{Id}}$. Тогда I называется **почти комплексной структурой**, а (M, I) - **почти комплексным многообразием.**

Почти комплексная структура задает разложение

$$TM \otimes \mathbb{C} \cong T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M),$$

где $T^{1,0}$, $T^{0,1}$ – собственные подпространства для $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. Наоборот, каждое такое разложение, позвояет определить оператор I, действующий на $TM \otimes \mathbb{C}$ подобным образом; он является вещественным при условии

$$\overline{T^{1,0}(M)} = T^{0,1}(M), \quad \overline{T^{0,1}(M)} = T^{1,0}(M).$$

Поэтому каждое комплексное многообразие имеет естественную почти комплексную структуру.

Определение 1.2. Почти комплексная структура I на многообразии называется **интегрируемой**, если (M, I) получено из комплексного многообразия вышеописанным образом.

Отметим, что в этой ситуации пучок голоморфных функций на многообразии (M, I) однозначно восстанавливается по I. Действительно, функция f голоморфна тогда и только тогда, когда $\operatorname{Lie}_X f = 0$, для каждого $(0,1)$-векторного поля X. Здесь Lie_X обозначает производную f вдоль X.

Поэтому комплексная структура на M восстанавливается из почти комплексной.

Определение 1.3. Почти комплексная структура I на многообразии называется **формально интегрируемой**, если $[X, Y] \subset T^{0,1}M$, для любых $X, Y \in T^{0,1}M$.

Задача 1.4. Проверьте, что из интегрируемости следует формальная интегрируемость.

Обратное неверно в бесконечномерной ситуации (пространство узлов в любом трехмерном многообразии с естественной почти комплексной структурой формально интегрируемо, и даже кэлерово, но не интегрируемо). В ситуации, когда (M, I) гладкое и конечномерное, из формальной интегрируемости следует обычная интегрируемость; эта теорема весьма трудная. Трудоемкая часть теоремы состоит в доказательстве вещественной аналитичности (M, I); для вещественно аналитических многообразий равносильность интегрируемости и формальной интегрируемости очевидна. Об этом ниже.

Определение 1.5. Комплекснозначная функция f на почти комплексном многообразии (M, I) называется **голоморфной**, если $\operatorname{Lie}_X f = 0$, для каждого $(0, 1)$-векторного поля X.

Задача 1.6. Пусть (M, I) - почти комплексное многообразие, такое, что пучок $\Lambda^{1,0}(M)$ локально порожден дифференциалами от голоморфных функций. Докажите, что I интегрируемо.

Указание 1.7. Выберите комплексные карты для (M, I), пользуясь теоремой о неявной функции.

Поэтому для доказательства интегрируемости почти комплексного многообразия, достаточно построить на нем много голоморфных функций.

Определение 1.8. Антиголоморфной функцией на комплексном многообразии называется такая функция f, что $\bar{f}$ голоморфно. Отображение $\phi : M \longrightarrow M$ называется **антикомплексным**, если оно переводит голоморфные функции в антиголоморфные.

Определение 1.9. Пусть $M_{\mathbb{C}}$ - комплексное многообразие, наделенное антикомплексной инволюцией $\iota : M_{\mathbb{C}} \longrightarrow M_{\mathbb{C}}$. Множество $M_{\mathbb{R}}$ неподвижных точек ι называется вещественно аналитическим многообразием. В этой ситуации $M_{\mathbb{C}}$ называется его **комплексификацией**.

Задача 1.10. Докажите, что в такой ситуации множество неподвижных точек ι гладко, и $\dim_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{C}}$. Постройте естественный изоморфизм $TM_{\mathbb{C}}\Big|_{M_{\mathbb{R}}} \cong TM_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

Определение 1.11. Пусть M - вещественно-аналитическое многообразие, $M_{\mathbb{C}}$ его комплексификация а $I: TM \longrightarrow TM$ - почти комплексная структура на M. Оператор I называется **вещественно аналитичным**, если на $M_{\mathbb{C}}$ задан голоморфный оператор $I_{\mathbb{C}}: TM_{\mathbb{C}} \longrightarrow TM_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющий $I_{\mathbb{C}}^2 = -1$, и при естественном изоморфизме $TM_{\mathbb{C}}\Big|_{M_{\mathbb{R}}} \cong TM_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$, $I_{\mathbb{C}}$ соответствует I.

Рассмотрим разложение

$$TM_{\mathbb{C}} \cong T^{1,0}M_{\mathbb{C}} \oplus T^{0,1}M_{\mathbb{C}}$$

в собственные пространства $I_{\mathbb{C}}$. В силу принципа аналитического продолжения, формальная интегрируемость I влечет $[X,Y] \subset T^{0,1}M$, для любых $X,Y \in T^{0,1}M_{\mathbb{C}}$. Поэтому распределение $T^{1,0}M_{\mathbb{C}}$ интегрируемо. Аналогичный аргумент доказывает, что $T^{0,1}M_{\mathbb{C}}$ тоже интегрируемо. Локально в окрестности любой точки получаем $M_{\mathbb{C}} = M^{1,0} \times M^{0,1}$, с естественными проекциями, идущими вдоль листов слоений $T^{1,0}M_{\mathbb{C}}, T^{0,1}M_{\mathbb{C}}$.

Задача 1.12. Выведите из теоремы о неявной функции, что ограничение проекции $\pi: M_{\mathbb{C}} \longrightarrow M^{1,0}$ на $M \subset M_{\mathbb{C}}$ является изоморфизмом, локально в окрестности каждой точки M.

Поскольку $M^{1,0}$ комплексное многообразие, полученное выше отображение задает комплексную структуру на M. Она согласована с I, поскольку любая функция, которая постоянна на листах слоения $T^{0,1}M_{\mathbb{C}}$, удовлетворяет $\operatorname{Lie}_X f = 0$ для любого $X \in T^{0,1}M$, следовательно, голоморфна. И в самом деле, голоморфные функции на $M_{\mathbb{C}}$, которые постоянны вдоль слоев $T^{0,1}M_{\mathbb{C}}$, задают голоморфные функции на (M, I).

В дальнейшем мы будем называть "комплексным многообразием" почти комплексное многообразие с интегрируемой почти комплексной структурой

1.2. Связность Леви-Чивита

Пусть $\nabla: TM \longrightarrow TM \otimes \Lambda^1 M$ – связность на TM. С этой связностью, как обычно, можно ассоциировать связность на любом тензорном расслоении над M. Обозначим за

$$\bigwedge: \Lambda^i(M)\otimes\Lambda^1(M)\longrightarrow\Lambda^{i+1}(M)$$

отображение внешнего умножения.

Определение 1.13. Тензором кручения связности $\nabla: TM\longrightarrow TM\otimes\Lambda^1 M$ назовем отображение $T_\nabla(X,Y):=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$, где X,Y - векторные поля.

Задача 1.14. Докажите, что это тензор.

Будем рассматривать T_∇ как элемент $\Lambda^2 M\otimes TM$.

Задача 1.15. Пусть $\nabla: TM\longrightarrow TM\otimes\Lambda^1 M$ связность на TM, где M – гладкое многообразие. Докажите, что следующие условия равносильны

- связность $\nabla: TM\longrightarrow TM\otimes\Lambda^1 M$ не имеет кручения (т.е. $T_\nabla=0$).
- Индуцированная ∇ связность на $\Lambda^i(M)$ удовлетворяет $\bigwedge\otimes\nabla=d$, где $d: \Lambda^i(M)\longrightarrow\Lambda^{i+1}(M)$ – дифференциал де Рама.

Определение 1.16. Пусть (M,g) - риманово многообразие, $g\in S^2(M)$ - его тензор Римана. Связность ∇ называется **ортогональной**, если $\nabla g=0$. Она называется **связностью Леви-Чивита**, если $\nabla g=0$ и $T_\nabla=0$.

Пусть ∇_1,∇_2 - две ортогональные связности. Тогда $\nabla_1-\nabla_2$ – 1-форма с коэффициентами в $\mathfrak{so}(TM)$, и, наоборот, любая ортогональная связность получается таким образом (докажите это). Поэтому множество ортогональных связностей есть аффинное пространство, с линеаризацией, изоморфной $\Lambda^1(M)\otimes\mathfrak{so}(TM)$.

Обозначим за Alt^{12} операцию альтернирования тензора по первым двум аргументам. Тогда для любой 1-формы $A\in\Lambda^1(M)\otimes\mathfrak{so}(TM)$, и связностей ∇_1,∇_2, $\nabla_1-\nabla_2=A$, имеем

$$T_{\nabla_1}-T_{\nabla_2}=\mathsf{Alt}^{12}(A).$$

Задача 1.17. Докажите, что

$$\mathsf{Alt}^{12}: \Lambda^1(M)\otimes\mathfrak{so}(TM)\longrightarrow\Lambda^2 M\otimes TM$$

изоморфизм

Указание 1.18. Воспользуйтесь изоморфизмом $\mathfrak{so}(TM) \cong \Lambda^2 M$.

Пусть ∇_1 - произвольная ортогональная связность, а $A \in \Lambda^1(M) \otimes \mathfrak{so}(TM)$ Связность $\nabla_2 = \nabla_1 - A$ не имеет кручения тогда и только тогда, когда $\mathsf{Alt}^{12}(A) = {}_{\nabla_1}$. Воспользовавшись предыдущей задачей, убедитесь, что такое A существует и единственно. Мы получили **основную теорему дифференциальной геометрии**: *связность Леви-Чивита существует и единственна на каждом римановом многообразии.*

1.3. Кэлеровы многообразия

Определение 1.19. Пусть (M, I) - почти комплексное многообразие, а $g \in S^2TM$ - риманова форма. Форма g называется **эрмитовой структурой**, еслу $g(I\cdot, I\cdot) = g(\cdot, \cdot)$. В этой ситуации, $g(\cdot, I\cdot)$ это $(1,1)$-форма на M (проверьте). Она называется **эрмитовой формой для** g.

Определение 1.20. Комплексное, эрмитово многообразие (M, I, g) называется **кэлеровым**, если соответствующая эрмитова форма $\omega := g(\cdot, I\cdot)$ замкнута.

Следующая теорема является кэлеровым аналогом "основной теоремы дифференциальной геометрии.

Теорема 1.21: Пусть (M, I, g) - почти комплексное, эрмитово многообразие. Тогда следующие условия равносильны.

1. (M, I, g) – кэлерово.
2. $\nabla I = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита.

Доказательство ниже.

Отметим, что из $\nabla I = 0$ сразу следует кэлеровость. Действительно, из этого сразу вытекает $\nabla_X Y \in T^{1,0}(M)$ для любых векторных полей X, Y, при условии $Y \in T^{1,0}(M)$. По формуле

$$T_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{1.3.1}$$

из этого следует, что $[X, Y] \in T^{1,0}(M)$ для $X, Y \in T^{1,0}(M)$. Поэтому (M, I, g) формально интегрируема. С другой стороны, $\nabla\omega = 0$, поскольку $\nabla I = \nabla g = 0$, но $\bigwedge \nabla\omega = d\omega$, потому что ∇ без кручения.

1.4. Связности с кососимметрическим кручением

Определение 1.22. Пусть M – риманово многообразие, ∇ – ортогональная связность на TM, а $T_\nabla \in \Lambda^2(M)\otimes TM$ ее кручение. Обозначим за $T_\nabla^\sharp \in \Lambda^2(M)\otimes\Lambda^1(M)$ тензор, полученный из T_∇ посредством изоморфизма $TM \cong \Lambda^1(M)$, полученного из метрики. Говорится, что ∇ – **связность с тотально антисимметричным кручением,** если $T_\nabla^\sharp$ лежит в $\Lambda^3(M)\subset\Lambda^2(M)\otimes\Lambda^1(M)$.

Теорема 1.23: Пусть (M,I,∇) – комплексное эрмитово многообразие, а ω – эрмитова форма. Тогда на TM существует и единственна ортогональная связность ∇ такая, что $\nabla I = 0$, а кручение ∇ тотально антисимметрично. Более того, в этой ситуации $T_\nabla^\sharp = Id\omega$.

Когда (M,I,∇) кэлерово, из этой теоремы следует, что связность ∇ – без кручения. В силу единственности связности Леви-Чивита, это значит, что ∇ и есть Леви-Чивита. Поэтому из Теоремы 1.23 следует Теорема 1.21.

Пусть ∇ - связность, сохраняющая I и g. Такая связность всегда существует (докажите). Если ∇,∇_1 - две такие связности, то $\nabla-\nabla_1$ это 1-форма со значениями в $\mathfrak{u}(TM)$. И наоборот, для каждой такой 1-формы A, связность $\nabla + A$ также сохраняет I и g. Поэтому связности - это аффинное пространство, с линеаризацией, изоморфной $\Lambda^1(M)\otimes\mathfrak{u}(TM)$. Как и выше, отображение $\nabla \longrightarrow T_\nabla$ действует на этом аффинном пространстве по формуле

$$T_{\nabla+A} = T_\nabla + \mathsf{Alt}^{12}(A).$$

Расслоение $\mathfrak{u}(TM)$ отождествляется с $\Lambda^{1,1}(M)$ обычным образом. Обозначим соответствующий изоморфизм

$$\Lambda^1(M)\otimes\mathfrak{u}(TM) \longrightarrow \Lambda^1(M)\otimes\Lambda^{1,1}(M)$$

за $A \longrightarrow A^\sharp$. Получаем

$$T^\sharp_{\nabla+A} = T^\sharp_\nabla + \mathsf{Alt}^{12}(A^\sharp).$$

Пусть ∇ – связность, которая сохраняет комплексную структуру, а

$$T_\nabla \in \Lambda^{1,1}(M)\otimes TM \oplus \Lambda^{2,0}(M)\otimes T^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,2}(M)\otimes T^{0,1}M \qquad (1.4.1)$$

разложение Ходжа для ее кручения. Компоненты $\Lambda^{2,0}(M) \otimes T^{0,1}M$ и $\Lambda^{0,2}(M)\otimes T^{1,0}M$ отсутствуют в силу формулы (1.3.1). Из (1.4.1) получаем

$$\begin{aligned} T^\sharp_\nabla &\in \Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^{2,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M) \oplus \Lambda^{0,2}(M) \otimes \Lambda^{1,0}(M) \\ &= \Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M). \end{aligned}$$

Поэтому линеаризация отображения $\nabla \longrightarrow T^\sharp_\nabla$ равна

$$\mathsf{Alt}^{12}: \ \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^{1,1}(M) \longrightarrow \Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M).$$

Образ этого отображения не пересекается с пространством тотально кососимметричных тензоров, и ему дополнителен, по соображениям размерности. Действительно, отображение

$$\mathsf{Alt}^{12}: \ \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2(M) \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2(M)$$

это изоморфизм (см. выше), значит, $\mathsf{Alt}^{12}(\eta)$ тотально кососимметричен, только если η кососимметричен, а элемент $\Lambda^1(M) \otimes \Lambda^{1,1}(M)$ не может быть тотально кососимметричен, что ясно из рассмотрения его ходжевых компонент.

Поэтому, для каждой связности ∇, найдется единственная форма $A \in \Lambda^1(M) \otimes \mathfrak{u}(TM)$ такая, что тензор

$$T^\sharp_{\nabla - A} = T^\sharp_\nabla + \mathsf{Alt}^{12}(A^\sharp)$$

тотально кососимметричен. Чтобы доказать, $T^\sharp_\nabla = Id\omega$, отметим, что в силу $\bigwedge \otimes \nabla = d$, имеем $T_\nabla(\omega) = d\omega$, но $T_\nabla(\omega) = I(T^\sharp_\nabla)$ (проверьте). Мы закончили доказывать Теорему 1.23 и Теорему 1.21.

1.5. Кручение G-структур

Определение 1.24. Пусть G - группа Ли, P гладкое многообразие, а G гладко действует на P. Расслоение $P \longrightarrow$ называется **главным G-расслоением**, если G действует на P свободно, а $P/G = M$.

Определение 1.25. Пусть $G_1 \subset G$ – подгруппа группы Ли G, $P \longrightarrow M$ – главное G-расслоение, а $P_1 \subset P$ – гладкое подмногообразие P, которое сохраняется подгруппой $G_1 \subset G$. Если $P_1 \longrightarrow M$ является главным G_1-расслоением, оно называется **редукцией главного G-расслоения $P \longrightarrow$ к подгруппе $G_1 \subset G$.**

Задача 1.26. Докажите, что в такой ситуации $P = P_1 \otimes G/G_1$, где фактор берется по диагональному действию G_1.

Отметим, что на каждом n-мерном многообразии задано каноническое $GL(n, \mathbb{R})$-расслоение, точки которого соответствуют реперам в TM.

Определение 1.27. Пусть M - n-мерное многообразие, а G - подгруппа $GL(n, \mathbb{R})$. **G-структурой** на многообразии называется редукция расслоения реперов к G.

По теореме Шевалле, каждая группа Ли определяется системой тензорных инвариантов.

Те G-структуры, которые встречаются в дифференциальной геометрии, в большинстве случаев задаются явно своими тензорными инвариантами. А делается это так.

Пусть M - n-мерное многообразие, а $T_1, ...T_k$ - набор тензоров (сечений расслоения $TM^{\otimes \rho} \otimes \Lambda^1 M^{\otimes \mu}$, для каких-то ρ и μ). Предположим, что локально по M существует тривиализация TM, такая, что $T_1, ...T_k$ постоянные сечения. Такую тривиализацию можно всегда задать плоской связностью ∇; постоянство $T_1, ...T_k$ относительно тривиализации значит, что $\nabla T_i = 0$.

В основном случае, который нас интересует, T_1 это почти комплексная структура, а T_2 это эрмитова метрика. Ясно, что локально $T_x M$ допускает отождествление с $\mathbb{C}^{n/2}$, причем эрмитова метрика переходит в обычную евклидову.

Зафиксируем тензоры $\tau_1, ..., \tau_k$ на векторном пространстве $V \cong \mathbb{R}^n$, которые соответствуют $T_1, ...T_k$ после какой-то тривиализации. В ситуации, описанной выше, T_1 это комплексная структура на $\mathbb{C}^{n/2}$, а $_2$ – обычное (евклидово) скалярное произведение

Рассмотрим расслоенное пространство, слои которого (в каждой точке $x \in M$) состоят из изоморфизмов $T_x M \cong V$, переводящих T_i в τ_i. Легко видеть, что это главное G-расслоение, где G это стабилизатор $\tau_1, ..., \tau_k$. Поскольку (по теореме Шевалле) задание тензоров $\tau_1, ..., \tau_k$ равносильно заданию G-структуры, можно считать это определением G-структуры.

Примерам этого несть числа (римановы, комплексные, эрмитовы, кватернионно эрмитовы многообразия, и так далее).

Определение 1.28. В этих условиях, говорится, что связность ∇ **согласована с G-структурой**, если $\nabla \tau_i = 0$.

Задача 1.29. Пусть $P \xrightarrow{\pi} M$ – главное расслоение, ассоциированное с G-структурой, а $T_\pi P$ - вертикальное касательное пространство, состоящее из всех векторов таких, что $d\pi(x) = 0$. Докажите, что связности, согласованные с G-структурой, находятся во взаимно однозначном соответствии с G-инвариантными подрасслоениями $T_{hor}P \subset TP$ такими, что $T_{hor}P \oplus T_\pi P = TP$.

Замечание 1.30. Из этой задачи сразу вытекает существование связности, согласованной с G-структурой.

Обозначим за $\mathfrak{g}(TM)$ расслоение алгебр Ли, состоящее из эндоморфизмов $v \in \operatorname{End}(TM)$, которые удовлетворяют $[v, \tau_i] = 0$. Связности, согласованные с G-структурой, образуют аффинное пространство, с линеаризацией $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(TM)$.

Отображение $\nabla \longrightarrow T_\nabla$ – аффинное, с линеаризацией

$$\mathsf{Alt}^{12} : \ \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(TM) \longrightarrow \Lambda^2 \otimes TM.$$

Определение 1.31. Коядро

$$\mathfrak{T} := \frac{\Lambda^2 \otimes TM}{\operatorname{im} \mathsf{Alt}^{12}(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(TM))}$$

называется **пространством кручения** G-структуры. Для любой связности ∇, согласованной с G-структурой, представитель T_∇ в $\mathfrak{T}$ называется **кручением G-структуры**.

Задача 1.32. Докажите, что кручение G-структуры не зависит от выбора ∇. Докажите, что кручение G-структуры нулевое тогда и только тогда, когда существует связность без кручения, которая сохраняет G-структуру.

Замечание 1.33. Если G компактна, G сохраняет какую-то метрику, следовательно, лежит в $SO(TM)$. В этом случае,

$$\mathsf{Alt}^{12} : \ \Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}(TM) \longrightarrow \Lambda^2 \otimes TM.$$

вложение, как было показано выше, а значит связность без кручения единственна.

Замечание 1.34. Кручение G-структуры определил Эли Картан. Он доказал, что кручение является единственным инвариантом первого порядка.

Замечание 1.35. В теореме 1.21 мы доказали, что $d\omega = 0$ влечет отсутствие кручения для G-структуры, заданной тензорами I и g. Доказательство состояло в явном вычислении кручения для этой G-структуры, в предположении, что I интегрируемо.

Задача 1.36. Найдите кручение G-структуры, определенной следующими инвариантными тензорами.

- Почти комплексная структура
- Невырожденная 1-форма
- 2-форма постоянного ранга
- Нигде не зануляющееся векторное поле
- Оператор $I: TM \longrightarrow TM$, удовлетворяющий $I^2 = 1$, и с собственными пространствами постоянного ранга.