ТОПОЛОГИЯ, задачи для устного экзамена

Можно свободно пользоваться всеми задачами и теоремами из листков и лекций, но надо быть готовым предъявить доказательство для каждого утверждения.

Метрические пространства и пополнение (листки 1-2)

Задача 1.1. Пусть $z = \sum_{i=0}^\infty a_i p^i$, $0 \leqslant a_i < p$ – целое p-адическое число. Докажите, что последовательность a_i периодическая тогда и только тогда, когда z рационально (имеет вид $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$).

Определение 1.1. Напомним, что **изолированной точкой** топологического пространства называется одноточечное подмножество, которое открыто.

Задача 1.2. Пусть M – компактное, бесконечное метрическое пространство без изолированных точек. Может ли M быть счетно?

Задача 1.3. Пусть $f: \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция на пространстве p-адических чисел. Определим $\int_{\mathbb{Z}_p} f$ как предел

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f := \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{p^N} \sum_{i=0}^{p^N - 1} f(i)$$

(здесь мы рассматриваем f как функцию на $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$). Докажите, что этот предел существует. Докажите, что $|f|_{L^1} := \int_{\mathbb{Z}_p} |f|$ задает норму на пространстве $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что отображение

$$(C(\mathbb{Z}_p), |\cdot|_{L^\infty}) \longrightarrow (C(\mathbb{Z}_p), |\cdot|_{L^1})$$

из пространства $C(\mathbb{Z}_p)$ с sup-нормой в пространство $C(\mathbb{Z}_p)$ с L^1-нормой непрерывно и не является гомеоморфизмом.

Задача 1.4. Пусть M – континуальное, компактное метрическое пространство, $S \subset \mathbb{R}$ – множество значений, которые принимает метрика на M. Может ли S быть равно $\left\{1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots\right\}$? А $\mathbb{Q}$?

Задача 1.5. Дана выпуклая функция на бесконечномерном нормированном пространстве. Всегда ли она непрерывна?

Задача 1.6. Докажите, что каждое метрическое пространство допускает изометрическое вложение в векторное пространство с нормой.

Аксиомы Хаусдорфа, счетная база, компактность (листки 3-5)

Определение 1.2. Напомним, что топологическое пространство M называется **регулярным**, если для каждой точки $x \in M$, и для каждого замкнутого подмножества $Z \subset M$, не содержащего x, у Z и x найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 1.7. Дано локально компактное, хаусдорфово пространство. Всегда ли оно регулярно?

Задача 1.8. Пусть M – хаусдорфово, регулярное пространство. Докажите, что любое замкнутое подмножество M – пересечение открытых.

Определение 1.3. Напомним, что непрерывное отображение называется **собственным**, если прообраз любого компактного множества – компакт, **замкнутым**, если образ любого замкнутого множества замкнут, и **открытым**, если образ любого открытого открыт.

Задача 1.9. Приведите пример непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, которое

а. открыто, не собственно, не замкнуто

б. замкнуто, не собственно, не открыто

или докажите, что их не существует.

Задача 1.10. Пусть $X \xrightarrow{\phi} Y$ – некоторое отображение топологических пространств (не обязательно непрерывное), X, Y компактны, X хаусдорфово, а график ϕ замкнут. Докажите, что ϕ непрерывно. Необходима ли для этого компактность X? А компактность Y?

Произведения топологических пространств, теорема Тихонова и метризуемость (листки 4-5)

Определение 1.4. Напомним, что множество $\{0, 1\}$ с дискретной топологией называется **двоеточием**.

Задача 1.11. Докажите, что произведение $\prod_{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ (счетное произведение двоеточия на себя) гомеоморфно $\mathbb{Z}_2$.

Задача 1.12. Пусть M компактно и хаусдорфово, R – кольцо непрерывных функций $M \longrightarrow \mathbb{R}$, а I – максимальный идеал в R. Докажите, что существует точка $x \in M$ такая, что I – идеал функций, зануляющихся в x.

Задача 1.13. Пусть топологическое пространство M компактно, и для любых двух точек $x, y \in M$, найдется непрерывное отображение $f: M \longrightarrow M'$ в метрическое пространство M', разделяющее x и y. Докажите, что M хаусдорфово.

Поточечная и равномерная сходимость (листок 6)

Задача 1.14. Пусть $V = C([0, 1])$ – пространство непрерывных функций на отрезке, с sup-метрикой, а $K \subset V$ – множество дифференцируемых функций $f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ с $|f'| < 1$. Верно ли, что его замыкание $\bar{K}$ компактно?

Задача 1.15. Существует ли непрерывное, сюрьективное отображение из $[0, 1]$ в замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$? А в открытый шар?

Связность и линейная связность (листки 7-8)

Задача 1.16. Пусть $M = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$. Докажите, что M связно.

Задача 1.17. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$ – множество точек, у которых не больше одной иррациональной координаты. Докажите, что M связно.

Задача 1.18. Пусть M – хаусдорфово пространство, а $\{X_\alpha\}$ – его компоненты линейной связности. Может ли случиться, что каждая компонента X_α плотна в M?

Задача 1.19. Пусть у M есть компонента линейной связности, которая плотна в M. Докажите, что M связно.

Задача 1.20. Может ли существовать связное, счетное, хаусдорфово компактное пространство?

Задача 1.21. Пусть (M, d) – компактное метрическое пространство с внутренней метрикой. Докажите, что любой класс $[\gamma] \in \pi_1(M, m)$ может быть представлен кривой $\gamma \in \Omega(M, m)$ наименьшей длины.

Накрытия и гомотопии (листки 8-10)

Задача 1.22. Пусть D – множество всех метрик, совместимых с топологией, на компактном топологическом пространстве M. Рассмотрим на $D \times D$ функцию

$$d(\delta_1, \delta_2) := \sup_{x,y \in M} (|\delta_1(x, y) - \delta_2(x, y)|)$$

Докажите, что это метрика. Докажите, что полученное таким образом топологическое пространство D линейно связно, и $\pi_1(D, \delta) = \{1\}$.

Задача 1.23. Пусть $GL(n, \mathbb{R})^+ \subset \mathbb{R}^{n^2}$ – множество всех матриц с положительным определителем, а $SL(n, \mathbb{R})$ – множество в всех матриц с единичным определителем. Докажите, что пространство $GL(n, \mathbb{R})^+$ гомотопически эквивалентно $SL(n, \mathbb{R})$, для любого $n \geqslant 1$. Будет ли естественное вложение $SL(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ гомотопической эквивалентностью?

Задача 1.24. Пусть Γ – конечная группа действующая на $\mathbb{R}^2$ изометриями, сохраняющими 0, а $M := \mathbb{R}^2/\Gamma$ – факторпространство. Докажите, что M гомеоморфно $\mathbb{R}^2$ либо полуплоскости $\mathbb{R} \times [0, \infty[$.

Задача 1.25. Пусть $\mathbb{R}P^n$ – проективное пространство, $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm 1\}$ а $\phi : \mathbb{R}P^n \longrightarrow T^m$ непрерывное отображение $\mathbb{R}P^n$ в тор, $n > 1$. Докажите, что ϕ гомотопно отображению в точку.

Задача 1.26. Пусть $V \subset W$ – векторные пространство над $\mathbb{R}$, а $\mathbb{P}V$, $\mathbb{P}W$ – соответствующие проективные пространства (их можно определить как $S_V/\{\pm 1\}$, $S_W/\{\pm 1\}$, где S_V, S_W – единичные сферы в V, W). Докажите, что естественное вложение $\mathbb{P}V \hookrightarrow \mathbb{P}W$ не гомотопно отображению в точку.

ТОПОЛОГИЯ, задачи для письменного экзамена

Можно свободно пользоваться всеми теоремами из лекций, но надо дать ссылку. Решая задачи, можно (и нужно) пользоваться любыми учебниками, монографиями и статьями, приводя в записках доказательства по мере необходимости. Решение принести на пересдачу записанным максимально полно и аккуратно. Помнить подробности всех доказательств, быть в состоянии разъяснить, где потребуется.

Метрические пространства и пополнение (листки 1-2)

Определение 2.1. Напомним, что **диаметром** метрического пространства M называется число $\operatorname{diam}(M) := \sup_{x,y\in M} d(x,y)$.

Определение 2.2. Полное метрическое пространство U_d диаметра d со счетной базой называется **пространством Урысона**, если для любого метрического пространства $X, \operatorname{diam}(X) \leqslant d$ со счетной базой, и любого $Z \subset X$, любое изометрическое вложение $Z \hookrightarrow U_d$ продолжается до изометрического вложения $X \hookrightarrow U_d$.

Задача 2.1. Докажите, что пространство Урысона существует, и единственно, с точностью до изометрии. Докажите, что сфера радиуса $d' \leqslant d$ в U_d изометрична $U_{d'}$.

Задача 2.2. Пусть $\prod_p \mathbb{Q}_p$ – произведение всех $\mathbb{Q}_p$, для всех простых p, с топологией произведения, а $\underline{\prod_p \mathbb{Q}_p}$ – подкольцо в $\prod_p \mathbb{Q}_p$, состоящее из последовательностей вида $(x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, ...)$, где почти все x_p – целые p-адические. Рассмотрим топологическое кольцо $A := \underline{\prod_p \mathbb{Q}_p} \times \mathbb{R}$. Пусть $\mathbb{Q} \hookrightarrow A$ – естественное вложение кольца рациональных чисел в A, $q \longrightarrow (q, q, q, q, q, q, ...)$. Докажите, что $\mathbb{Q}$ дискретно в A, и факторгруппа $A/\mathbb{Q}$ компактна.

Задача 2.3. Пусть $\{X_i\}$ – последовательность замкнутых подмножеств полного метрического пространства M, сходящаяся (в смысле расстояния Хаусдорфа) к X. Предположим, что метрика на X_i внутренняя (т.е. $d(x,y)$ равно инфимуму длин путей из x в y). Докажите, что метрика на X тоже внутренняя.

Задача 2.4. Пусть X, Y – компактные метрические пространства. Определим **расстояние Громова-Хаусдорфа** $d_{GH}(X,Y)$ как $\inf_{f,g} d_H(X,Y)$, где инфимум берется по всем изометрическим вложениям $f: X \longrightarrow U_\lambda$, $g: Y \longrightarrow U_\lambda$ в пространство Урысона. Докажите, что это метрика, и метрическое пространство $(\mathfrak{M}, d_{GH})$ компактных метрических пространств полно.

Аксиомы Хаусдорфа, счетная база, компактность (листки 3-5)

Определение 2.3. Напомним, что топологическое пространство M называется **регулярным**, если для каждой точки $x \in M$, и для каждого замкнутого подмножества $Z \subset M$, не содержащего x, у Z и x найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 2.5. Дано хаусдорфово пространство со счетной базой. Всегда ли оно регулярно?

Задача 2.6. Существует ли хаусдорфово топологическое пространство M такое, что все непрерывные функции $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ постоянны?

Задача 2.7. Существует ли счетное, хаусдорфово пространство без счетной базы?

Произведения топологических пространств, теорема Тихонова и метризуемость (листки 4-5)

Задача 2.8. Пусть M – компактное, вполне несвязное, хаусдорфово, бесконечное и без изолированных точек. Докажите, что существует сюрьективное, непрерывное отображение из M на $\mathbb{Z}_p$, для любого p.

Задача 2.9. Пусть V – нормированное векторное пространство, а $K \subset V$ – компактное подмножество, порождающее V, такое, что любой вектор V можно выразить как линейную комбинацию векторов из K. Докажите, что V сепарабельно. Всегда ли V банахово?

Задача 2.10. Постройте сюрьективное непрерывное отображение из $[0,1]$ в гильбертов куб. Существует ли сюрьективное, непрерывное отображение из $[0,1]$ в пространство $\prod_{\mathbb{R}}[0,1]$ – континуальное произведение отрезка на себя?

Определение 2.4. Напомним, что **топологической группой** называется топологическое пространство, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции непрерывны.

Задача 2.11. Пусть G – компактная, бесконечная, хаусдорфова топологическая коммутативная группа. G содержит замкнутую подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_p$ либо S^1 (окружности).

Задача 2.12. (Теорема Титце о продолжении) Пусть M – нормальное топологическое пространство, $Z \subset M$ замкнуто, а $f: \ Z \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Докажите, что f можно продолжить до непрерывной функции на M.

Поточечная и равномерная сходимость (листок 6)

Задача 2.13. Пусть M – компактное метрическое пространство. Введем на группе $\operatorname{Iso}(M)$ изометрий M sup-метрику формулой $d(f,g) := \sup_{x\in M} d(f(x), g(x))$. Докажите, что группа $\operatorname{Iso}(M)$ компактна.

Задача 2.14. Пусть $V = C([0,1])$ – пространство непрерывных функций на отрезке, с sup-метрикой, а $K \subset V$ – множество дифференцируемых функций $f: \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ с $|f'| < 1$. Докажите, что замыкание $\bar{K}$ – множество 1-липшицевых отображений $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Вполне несвязные пространства (листок 7)

Задача 2.15. Докажите, что $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно $\mathbb{Z}_q$, для любых p, q.

Задача 2.16. Пусть M, N – вполне несвязные, компактные, хаусдорфовы топологические пространства без изолированных точек. Предположим, что M и N имеют мощность континуума. Всегда ли M гомеоморфно N?

Связность и линейная связность (листки 7-8)

Задача 2.17. Существует ли локально связное, связное хаусдорфово пространство M такое, что любое непрерывное отображение $[0,1] \longrightarrow M$ постоянно? А если M компактно?

Задача 2.18. Пусть (M,d) – компактное метрическое пространство с внутренней метрикой, а $\phi: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – липшицево вложение, которое удовлетворяет $d(x,y) < \frac{\pi}{2} d(\phi(x), \phi(y)$. Докажите, что образ M односвязен.

Задача 2.19. Существует ли связное, счетное, хаусдорфово топологическое пространство?

Накрытия и гомотопии (листки 8-10)

Задача 2.20. Пусть (M,d) – компактное метрическое пространство с внутренней метрикой, а Γ_a – множество классов $[\gamma] \in \pi_1(M,m)$, которые могут быть представлены кривой $\gamma \in \Omega(M,m)$ длины меньше a. Докажите, что множество Γ_a конечно.

Задача 2.21. В условиях предыдущей задачи, докажите, что Γ_a порождает фундаментальную группу M, для $a > 2\operatorname{\mathsf{diam}}(M)$.

Задача 2.22. Докажите, что у свободной группы F_r, $r \geqslant 2$ не существует конечнопорожденных нормальных подгрупп.

Задача 2.23. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а $\sim$ – соотношение эквивалентности, заданное подмножеством $Z \subset M \times M$. Рассмотрим множество классов эквивалентности $M/\sim$, снабженное топологией фактора. Предположим, что $Z \subset M \times M$ замкнуто. Следует ли из этого, что $M/\sim$ хаусдорфово?