Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ТОПОЛОГИЯ 1: Метрические пространства и норма.

В этом листочке предполагается знакомство с определением линейного пространства и скалярного произведения (т.е. положительно определенной билинейной симметричной формы), а также понятий кольца, поля, и определением поля вещественных чисел.

Метрические пространства, выпуклые множества, норма.

Определение 1.1. Метрическое пространство есть множество X, снабженное такой функцией $d: \ X \times X \to \mathbb{R}$, что

а. Для любых $x, y \in X$ имеем $d(x, y) \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$.

б. Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$

в. "Неравенство треугольника": для любых $x, y, z \in X$,

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Функция d, удовлетворяющая этим условиям, называется **метрикой**. Число $d(x, y)$ называется "расстоянием между x и y".

Если $x \in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \ \ | \ \ d(x, y) < \varepsilon$$

называется **(открытый) шар радиуса ε с центром в x**. Такой шар еще называется **ε-шар**. Замкнутый шар определяется как

$$\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \ \ | \ \ d(x, y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Задача 1.1. Рассмотрим любое подмножество в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с функцией d, заданной как $d(a, b) = |ab|$, где $|ab|$ – длина отрезка $[a, b]$ на плоскости. Докажите, что это метрическое пространство.

Задача 1.2. Рассмотрим такую функцию $d_\infty: \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$(x, y), (x', y') \mapsto \max(|x - x'|, |y - y'|).$$

Докажите, что это – метрика. Опишите единичный шар с центром в нуле.

Задача 1.3. Рассмотрим такую функцию $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$(x, y), (x', y') \mapsto |x - x'| + |y - y'|.$$

Докажите, что это – метрика. Опишите единичный шар с центром в нуле.

Задача 1.4 (*). Функция $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ называется **выпуклой вверх**, если $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, для любого вещественного $\lambda \in [0, 1]$. Пусть f – такая функция, а X, d – метрическое пространство. Предположим, что $f(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Докажите, что функция $d_f(x, y) = f(d(x, y))$ задает метрику на X.

Задача 1.5. Пусть V – линейное пространство с положительно определенной билинейной симметричной формой $g(x, y)$ (в дальнейшем мы будем называть такую форму **скалярным произведением**). Определим "расстояние" $d_g : V \times V \to \mathbb{R}$ как $d_g(x, y) = \sqrt{g(x - y, x - y)}$. Докажите, что $d(x, y) \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$.

Определение 1.2. Пусть $x \in V$ – вектор векторного пространства. **Параллельный перенос на вектор** x – это отображение $P_x : V \to V$, $y \mapsto y + x$.

Задача 1.6. Докажите, что функция d_g "инвариантна относительно параллельных переносов", т.е. $d_g(a, b) = d_g(P_x(a), P_x(b))$.

Задача 1.7. Докажите, что d_g удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\sqrt{g(x - y, x - y)} \leqslant \sqrt{g(x, x)} + \sqrt{g(y, y)}$$

Указание. Рассмотрим подпространство $V_0 \subset V$, порожденное x и y. Докажите, что оно либо одномерно, либо изоморфно, как пространство со скалярным произведением, пространству $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $g((x, y), (x', y')) = xx' + yy'$. Воспользуйтесь неравенством треугольника для $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.8 (!). Докажите, что d_g – это метрика.

Указание. Пользуясь инвариантностью относительно параллельных переносов, сведите эту задачу к предыдущей.

Определение 1.3. Пусть V – пространство со скалярным произведением g, а d_g – метрика, построенная выше. Эта метрика называется **евклидовой.**

Определение 1.4. Пусть V – линейное пространство, $P_x : V \to V$ – параллельный перенос, а $V_1 \subset V$ – одномерное подпространство. Тогда образ $P_x(V_1)$ называется **прямой** в V.

Задача 1.9. Даны две разные точки $x, y \in V$. Докажите, что существует единственная прямая $V_{x,y}$, проходящая через x и y.

Определение 1.5. Пусть l прямая, проведенная через точки x и y, a - точка, ляжащая на l. Мы говорим, что a лежит **между** x, y, если $d(x, a) + d(b, y) = d(x, y)$. **Отрезок прямой между** x **и** y (обозначается $[x, y]$) есть множество всех точек прямой $V_{x,y}$, которые "лежат между" x и y.

Задача 1.10. Даны три разные точки на прямой. Докажите, что одна (и только одна) из этих точек лежит между другими. Докажите, что отрезок $[x, y]$ – это множество всех точек z вида $ax + (1 - a)y$, где $a \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.6. Пусть V – линейное пространство, а $B \subset V$ – некоторое подмножество. Говорят, что подможество B **выпуклое**, если для любых $x, y \in V$, B содержит все точки отрезка $[x, y]$.

Определение 1.7. Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$. **Нормой** на V называется такая функция $\rho: V \to \mathbb{R}$, что выполняются следующие свойства.

а. Для любого $v \in V$ имеем $\rho(v) \geqslant 0$. Более того, $\rho(v) > 0$ для всех ненулевых v.

б. $\rho(\lambda v) = |\lambda|\rho(v)$

в. Для любых $v_1, v_2 \in V$ выполнено $\rho(v_1 + v_2) \leqslant \rho(v_1) + \rho(v_2)$.

Задача 1.11. Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $\rho: V \to \mathbb{R}$ – норма на V. Рассмотрим функцию $d_\rho: V \times V \to \mathbb{R}$, $d_\rho(x, y) = \rho(x - y)$. Докажите, что это метрика на V.

Задача 1.12 (*). Пусть $d: V \times V \to \mathbb{R}$ – метрика на V, инвариантная относительно параллельных переносов. Предположим, что d удовлетворяет условию

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Докажите, что d получается из нормы $\rho: V \to \mathbb{R}$ по формуле $d(x, y) = \rho(x - y)$.

Задача 1.13. Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$, а $\rho: V \to \mathbb{R}$ – норма на V. Рассмотрим множество $B_1(0)$ всех точек с нормой $\leqslant 1$. Докажите, что это множество выпукло.

Определение 1.8. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, а v ненулевой вектор. Тогда множество всех векторов вида $\{\lambda v, \ \mid \ \lambda > 0\}$ называется **лучом в** V.

Определение 1.9. Центральная симметрия в V – это отображение $x \mapsto -x$.

Задача 1.14 (*). Пусть центрально симметричное выпуклое множество $B \subset V$ не содержит лучей и пересекается с каждым лучом $\{\lambda v, \ \mid \ \lambda > 0\}$. Рассмотрим функцию

$$v \stackrel{\rho}{\mapsto} \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^{>0} \ \mid \ \lambda^{-1} v \notin B\}$$

Докажите, что это норма на V. Докажите, что все нормы получаются таким образом.

Замечание. Эту функцию обыкновенно называют "функционал Минковского, построенный по телу".

Задача 1.15. Пусть G – абелева группа, а $\nu: G \to \mathbb{R}$ функция, которая принимает неотрицательные значения, и положительные значения для всех ненулевых $g \in G$. Предположим, что $\nu(a+b) \leqslant \nu(a)+\nu(b)$, $\nu(0) = 0$, а также что $\nu(g) = \nu(-g)$ для всех $g \in G$. Докажите, что функция $d_\nu: G \times G \to \mathbb{R}$, $d_\nu(x, y) = \nu(x - y)$ – это метрика на G.

Задача 1.16. Метрика d на абелевой группе G называется **трансляционно инвариантной**, если $d(x+g, y+g) = d(x,y)$ для всех $x, y, g \in G$. Докажите, что любая трансляционно инвариантная метрика d получена из некоторой функции $\nu: G \to \mathbb{R}$ по формуле $d(x,y) = \nu(x-y)$.

Определение 1.10. Зафиксируем простое число $p \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $\nu_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, которая ставит числу $n = p^k r$ (r не делится на p) в соответствие число p^{-k}, а $\nu_p(0) = 0$. Эта функция называется **p-адическим нормированием на $\mathbb{Z}$**.

Задача 1.17. Докажите, что функция $d_p(m,n) = \nu_p(n-m)$ задает метрику на $\mathbb{Z}$. Эта метрика называется **p-адической метрикой на $\mathbb{Z}$**.

Указание. Проверьте соотношение $\nu_p(a+b) \leqslant \nu(a)+\nu(b)$ и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 1.11. Пусть R – кольцо, а $\nu : R \to \mathbb{R}$ – функция, которая принимает неотрицательные значения, и положительные значения для всех ненулевых r. Предположим, что $\nu(r_1 r_2) = \nu(r_1)\nu(r_2)$, а $\nu(r_1 + r_2) \leqslant \nu(r_1) + \nu(r_2)$. Тогда ν называется **нормированием** кольца R. Кольцо, снабженное нормированием, называется **нормированное кольцо**.

Замечание. Как видно из вышеприведенных задач, нормирование на кольце R определяет инвариантную метрику на R. В дальнейшем любое нормированное кольцо будет рассматриваться как метрическое пространство.

Задача 1.18. Докажите, что ν_p – нормирование на кольце $\mathbb{Z}$. Определите нормирование на $\mathbb{Q}$, которая продолжает ν_p.

Полные метрические пространства.

Определение 1.12. Пусть (X,d) – метрическое пространство, а $\{a_i\}$ – последовательность точек из X. Последовательность $\{a_i\}$ называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется ε-шар в X, содержащий все a_i, кроме конечного числа.

Задача 1.19. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши в X. Докажите, что $\{d(a_i, b_i)\}$ – последовательность Коши в $\mathbb{R}$.

Определение 1.13. Пусть (X,d) – метрическое пространство, а $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши в X. Последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ называются **эквивалентными**, если последовательность $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$ – последовательность Коши.

Задача 1.20. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши в X. Докажите, что $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lim_{i\to\infty} d(a_i, b_i) = 0$.

Задача 1.21. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – эквивалентные последовательности Коши в X, а $\{c_i\}$ – еще одна последовательность Коши. Докажите, что

$$\lim_{i\to\infty} d(a_i, c_i) = \lim_{i\to\infty} d(b_i, c_i)$$

Задача 1.22 (!). Пусть (X, d) метрическое пространство, а $\overline{X}$ – множество классов эквивалентности последовательностей Коши. Докажите, что функция

$$\{a_i\}, \{b_i\} \mapsto \lim_{i \to \infty} d(a_i, b_i)$$

задает метрику на $\overline{X}$.

Определение 1.14. В такой ситуации, $\overline{X}$ называется **пополнением** X.

Задача 1.23. Рассмотрим естественное отображение $X \to \overline{X}$, $x \mapsto \{x, x, x, x, ...\}$. Докажите, что это вложение, которое сохраняет метрику.

Определение 1.15. Пусть A – подмножество в X. Элемент $c \in X$ называется **предельной точкой** подмножества A, если в любом открытом шаре, содержащем c, содержится бесконечное количество элементов A.

Задача 1.24. Дана последовательность Коши. Докажите, что у нее не может быть больше одной предельной точки.

Определение 1.16. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Мы говорим, что $\{a_i\}$ **сходится к** $x \in X$, или **имеет предел в** x (пишется $\lim_{i \to \infty} a_i = x$), если x – предельная точка $\{a_i\}$

Определение 1.17. Метрическое пространство (X, d) называется **полным**, если любая последовательность Коши в X имеет предел.

Задача 1.25 (!). Докажите, что пополнение метрического пространства полно.

Определение 1.18. Подмножество $A \subset X$ метрического пространства называется **плотным**, если в каждом открытом шаре в X содержится элемент из A.

Задача 1.26. Докажите, что X плотно в $\overline{X}$.

Задача 1.27 (!). Пусть R – кольцо, снабженное нормированием ν. Постройте сложение и умножение на пополнении R относительно метрики, соответствующей нормированию. Докажите, что $\overline{R}$ снабжено нормированием, продолжающем нормирование на R.

Определение 1.19. Нормированное кольцо $\overline{R}$ называется **пополнением** R **относительно нормирования** ν.

Задача 1.28 (*). Пусть R – нормированное кольцо, а $\overline{R}$ его пополнение. Предположим, что R – поле. Докажите, что $\overline{R}$ – тоже поле.

Задача 1.29. Докажите, что $\mathbb{R}$ получено пополнением $\mathbb{Q}$ относительно нормирования $q \mapsto |q|$. Можно ли это использовать в качестве еще одного определения $\mathbb{R}$?

Определение 1.20. Пополнение $\mathbb{Z}$ относительно нормирования ν_p называется **кольцо целых** p**-адических чисел**. Это кольцо обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Задача 1.30. Пусть (X,d) – метрическое пространство, а $\{a_i\}$ – последовательность точек из X. Предположим, что ряд $\sum d(a_i,a_{i-1})$ сходится. Докажите, что $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Верно ли обратное?

Задача 1.31 (!). Докажите, что для любой последовательности целых чисел a_k ряд $\sum a_k p^k$ сходится в $\mathbb{Z}_p$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.32. Докажите, что $(1-p)(\sum_{k=0}^{\infty} p^k) = 1$ в $\mathbb{Z}_p$.

Задача 1.33 (*). Докажите, что любое целое число, которое не делится на p, обратимо в $\mathbb{Z}_p$.

Определение 1.21. Пополнение $\mathbb{Q}$ относительно нормирования, полученного продолжением ν_p, обозначается $\mathbb{Q}_p$ и называется **(поле p-адических чисел)**.

Задача 1.34 (*). Дано $x \in \mathbb{Q}_p$. Докажите, что $x = \frac{x'}{p^k}$, где $x' \in \mathbb{Z}_p$.

Задача 1.35 (*). Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (здесь предел берется в $\mathbb{R}$, с обычной метрикой).

Определение 1.22. Нормирование ν кольца R называется **неархимедовым**, если $\nu(x+y) \leqslant \max(\nu(x),\nu(y))$ для всех x,y. В противном случае нормирование называется **архимедовым**.

Задача 1.36 (*). Пусть ν - нормирование в $\mathbb{Q}$. Докажите, что ν неархимедово тогда и только тогда, когда $\mathbb{Z}$ содержится в единичном шаре.

Указание. Воспользуйтесь пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Оцените $\sqrt[n]{((\nu(x+y)^n)}$ для больших n, воспользовавшись оценкой на биномиальные коэффициенты: $\nu(C_n^k) \leqslant 1$.

Задача 1.37 (*). Пусть ν - неархимедово нормирование в $\mathbb{Z}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}$, состоящее из всех целых n с $\nu(n) < 1$. Выведите из неархимедовости, что $\mathfrak{m}$ это *идеал* в $\mathbb{Z}$ (идеал в кольце R есть подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения на элементы из R). Докажите, что идеал $\mathfrak{m}$ *простой* (простой идеал это такой идеал, что $xy \notin \mathfrak{m}$ для всех $x,y \notin \mathfrak{m}$).

Задача 1.38 (*). Докажите, что любой идеал в $\mathbb{Z}$ имеет вид $\{0,\pm 1m,\pm 2m,\pm 3m,...\}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что любой простой идеал $\mathfrak{m}$ в $\mathbb{Z}$ имеет вид $\{0,\pm 1p,\pm 2p,\pm 3p,...\}$, где $p=0,1$ либо p простое.

Указание. Воспользуйтесь алгоритмом Евклида.

Задача 1.39 (*). Пусть ν – неархимедово нормирование $\mathbb{Q}$, а $\mathfrak{m} = \{p,2p,3p,4p,...\}$ – идеал, построенный выше. Докажите, что существует такое вещественное число $\lambda > 1$, что $\nu(n) = \lambda^{-k}$ для каждого $n = p^k r$, $r \not| p$.

Задача 1.40 (*). Пусть ν – такое нормирование $\mathbb{Q}$, что $\nu(2) \leqslant 1$. Докажите, что $\nu(a) < \log_2(a) + 1$ для любого целого $a > 0$.

Указание. Воспользуйтесь представлением числа N в двоичной системе счисления.

Задача 1.41 (*). Пусть ν – такое нормирование $\mathbb{Q}$, что $\nu(2) \leqslant 1$. Докажите, что $\nu(a) \leqslant 1$ для любого целого $a > 0$ (т.е. ν неархимедово).

Указание. Выведите из $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Воспользовавшись предыдущей задачей, получите $\lim\limits_{N\to\infty} \nu(a^N) \leqslant 1$.

Задача 1.42 (*). Пусть a_i – последовательность Коши рациональных чисел вида $\frac{x}{2^n}$ (“последовательность Коши” здесь понимается в обычном смысле, то есть как в вещественных числах). Предположим, что нормирование ν на $\mathbb{Q}$ архимедово. Докажите, что $\nu(a_i)$ - последовательность Коши.

Указание. Записав x в двоичной системе счисления, докажите, что

$$\nu(x/2^n) \leqslant \nu(2)^{\log_2(x)+1}/\nu(2)^n \leqslant \nu(2)^{\log_2(x+1)-n}.$$

Задача 1.43 (*). Выведите из этого, что нормирование ν продолжается до непрерывной функции на $\mathbb{R}$, которая удовлетворяет $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$. Докажите, что ν получается как $x \mapsto |x|^\lambda$ для какой-то константы $\lambda > 0$. Выразите λ через $\nu(2)$.

Задача 1.44 (*). Для каких $\lambda > 0$ функция $x \mapsto |x|^\lambda$ задает нормирование на $\mathbb{Q}$?

Мы получили полную классификацию нормирований на $\mathbb{Q}$: любое нормирование получается как степень p-адического нормирования либо модуля. Эта классификация называется **теорема Островского**.