Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Топология 10: фундаментальная группа и гомотопии

Гомотопии

Все топологические пространства в этом листочке предполагаются локально линейно связными и хаусдорфовыми, если не оговорено противного.

Определение 10.1. Пусть $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ – непрерывные отображения топологических пространств. Напомним, что **гомотопией** между f_1 и f_2 называется такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$, что $F\Big|_{\{0\}\times X}$ равно f_1, а $F\Big|_{\{1\}\times X}$ равно f_2.

Задача 10.1. Докажите, что гомотопные отображения индуцируют один и тот же гомоморфизм $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$.

Определение 10.2. Пусть $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ – непрерывные отображения топологических пространств, причем $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям из X в X и из Y в Y. Такие отображения называются **гомотопическими эквивалентностями**, а X и Y – **гомотопически эквивалентными**.

Задача 10.2. Докажите, что композиция гомотопических эквивалентностей отображений есть гомотопическая эквивалентность. Докажите, что гомотопическая эквивалентность пространств есть отношение эквивалентности.

Задача 10.3 (!). Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – гомотопическая эквивалентность. Докажите, что f индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Задача 10.4. Пусть $X \subset Y$ – ретракт. Докажите, что X и Y гомотопически эквивалентны.

Задача 10.5 (!). Пусть X – топологическое пространство. Докажите, что X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно гомотопически эквивалентно точке.

Задача 10.6 (!). Дан связный граф Γ, у которого n ребер и n вершин. Докажите, что его топологическое пространство гомотопически эквивалентно окружности.

Задача 10.7 (!). Пусть M – связное топологическое пространство, $x, x', y, y' \in M$ – любые точки. Докажите, что пространства путей $\Omega(M, x, x')$ и $\Omega(M, y, y')$ гомотопически эквивалентны.

Указание. Выберите путь γ_{xy}, соединяющий x и y и путь $\gamma_{x'y'}$, соединяющий x' и y'. Пусть $\gamma_{xy}^{-1}(t) = \gamma_{xy}(1-t)$ и $\gamma_{x'y'}^{-1}(t) = \gamma_{x'y'}(1-t)$. Рассмотрим отображение $f : \Omega(M, x, x') \longrightarrow \Omega(M, y, y')$ переводящее любой путь $\gamma \in \Omega(M, x, x')$ в композицию $\gamma_{xy}^{-1}\gamma\gamma_{x'y'}$, и аналогичное отображение $g : \Omega(M, y, y') \longrightarrow \Omega(M, x, x')$, переводящее $\gamma \in \Omega(M, y, y')$ в $\gamma_{xy}\gamma\gamma_{x'y'}^{-1}$. Докажите, что fg гомотопно тождественному и gf гомотопно тождественному.

Пространство путей на локально стягиваемых пространствах

Определение 10.3. Пусть M – топологическое пространство. M называется **локально стягиваемым**, если у каждой точки есть стягиваемая окрестность.

Задача 10.8. Пусть M – локально стягиваемое топологическое пространство. Докажите, что M локально линейно связно.

Задача 10.9 (*). Пусть M – такое геодезически связное метрическое пространство, что для какого-то $\delta > 0$ любые две точки, отстоящие на расстояние $< \delta$, соединяются единственной геодезической. Докажите, что M локально стягиваемо.

Задача 10.10. Докажите, что любой граф локально стягиваем.

Определение 10.4. Топологическое пространство M называется **многообразием размерности** n, если у любой точки найдется окрестность, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Многообразия, очевидно, локально стягиваемы.

Задача 10.11 (!). Докажите, что сфера S^n – это многообразие.

Указание. Воспользуйтесь стереографической проекцией.

Задача 10.12. Пусть M стягиваемое, $x, y \in M$. Докажите, что все пути $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ гомотопны.

Задача 10.13 (!). Пусть $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – путь в локально стягиваемом пространстве M, а $\{U_\alpha\}$ – множество стягиваемых открытых множеств на M. Выберем в $\{U_\alpha\}$ конечное подмножество, покрывающее γ (это можно сделать, потому что γ компактен). Пусть $V_1, \dots, V_n$ – соответствующее покрытие $[0, 1]$ связными интервалами, где каждый V_i является связной компонентой $\gamma^{-1}(U_i)$, а все U_i стягиваемы. Упорядочим V_i таким образом, что V_i и V_{i+1} пересекаются в точке t_i, и пусть $a_i := \gamma(t_i)$. Докажите, что любой путь $\gamma' \in \Omega(M, x, y)$, такой, что $\gamma'(t_i) = a_i$, и $\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, гомотопен γ.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.14 (!). Пусть M – локально стягиваемое топологическое пространство, а $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – некоторый путь. Докажите, что у γ найдется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \Omega(M, x, y)$, что все $\gamma' \in \mathcal{U}$ гомотопны.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Заметим, что на компактных многообразиях размерности > 1 существует петли, задаваемые сюрьективным отображением; пример такой петли легко построить тем же методом, что кривую Пеано.

Задача 10.15 (!). Пусть M это многообразие (например, сфера) размерности больше 1, а $\gamma \in \Omega(M, x)$ – петля. Докажите, что γ гомотопна петле, которая не сюрьективна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.16 (!). Пусть $n > 1$. Докажите, что n-мерная сфера односвязна.

Указание. Пусть γ – петля на сфере. Воспользовавшись предыдущей задачей, прогомотопируйте γ в петлю, которая отображает $[0,1]$ в $S^n \backslash \{x\}$, где x некоторая точка. Докажите, что сфера без точки гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, в частности стягиваема.

Задача 10.17 (*). Пусть M стягиваемо, а $F: \ M \times [0,1] \longrightarrow M$ – гомотопия тождественного отображения в постоянное отображение $M \to y \in M$. Рассмотрим следующее отображение $M \longrightarrow \Omega(M, y, *)$, $t, m \longrightarrow F(m,t)$ ($t \in [0,1]$, $m \in M$). Докажите, что оно непрерывно.

Задача 10.18. Пусть M локально стягиваемо, $x, y \in M$ – две точки, $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – некоторый путь. Докажите, что у γ есть такая окрестность $\mathcal{U} \in \Omega(M, x, *)$, что все пути $\gamma' \in \mathcal{U}$, соединяющие x и a, гомотопны в $\Omega(M, x, a)$.

Задача 10.19 (*). Пусть M – локально стягиваемое топологическое пространство, $x \in M$ – точка, а $\Omega(M, x, *)$ – множество всех путей, начинающихся в точке x, снабженное открытокомпактной топологией. Рассмотрим такое отношение эквивалентности на $\Omega(M, x, *)$: $\gamma \sim \gamma'$, если γ и γ' соединяют x и y, и гомотопны в $\Omega(M, x, y)$. Рассмотрим $\Omega(M, x, *)/\sim$, с топологией фактора. Выберем стягиваемую окрестность $U_y \ni y$, и пусть $U_y \xrightarrow{F} \Omega(U_y, y, *)$ – отображение, построенное в задаче 10.17. Пусть $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – некоторый путь, а $U_y \xrightarrow{\Psi} \Omega(M, x, *)$ – отображение, ставящее $a \in U_y$ путь $\gamma F(a)$ (то есть путь, заданный на $[0, 1/2]$ как $t \longrightarrow \gamma(2t)$, и на $[1/2, 1]$ как $F(a, 2t-1)$. Докажите, что (для достаточно маленького U_y) Ψ в композиции с $\Omega(M, x, *) \xrightarrow{\pi} \Omega(M, x, *)/\sim$ – это гомеоморфизм U_y на некоторое открытое подмножество в $\Omega(M, x, *)/\sim$.

Указание. Непрерывность $\Psi \circ \pi$ очевидна по конструкции, а инъективность следует из предыдущей задачи. Чтобы убедиться, что $\Psi \circ \pi$ задает гомеоморфизм U_y на $\Psi \circ \pi(U_y)$, нам нужно доказать, что $\Psi \circ \pi$ переводит открытые множества в открытые. Это ясно из того, что естественное отображение $\Omega(M, x, *)/\sim \ \longrightarrow M$, $\gamma' \longrightarrow \gamma'(1)$, непрерывно, и индуцирует гомеоморфизм U_y на образ.

Задача 10.20 (*). Рассмотрим отображение $\Omega(M, x, *)/\sim \ \longrightarrow M$, ставящее в соответствие пути $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ точку $y = \gamma(1)$. Докажите, что это накрытие.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.21 (!). Докажите, что $\Omega(M, x, *)$ стягиваемо.

Задача 10.22 (*). Пусть γ – путь в $\Omega(M, x, *)/\sim$. Докажите, что γ гомотопен образу некоторого пути из $\Omega(M, x, *)$.

Указание. Докажите, что γ можно поднять до пути в $\Omega(M, x, *)$ локально, и воспользуйтесь тем, что для каждой точки в $\Omega(M, x, *)/\sim$ ее прообраз в $\Omega(M, x, *)$ связен.

Задача 10.23 (*). Выведите из этого, что $\Omega(M, x, *)/\sim$ односвязно.

Замечание. Пусть (M, x) – локально стягиваемое топологическое пространство с отмеченной точкой. Универсальное накрытие M можно таким образом отождествить с множеством пар ($y \in M$, класс гомотопии путей $\gamma \in \Omega(M, x, y)$).

Свободная группа и букет

Определение 10.5. Пусть (M_1, x_1), (M_2, x_2), (M_3, x_3), ... – набор (возможно, бесконечный) связных топологических пространств с отмеченной точкой. Рассмотрим факторпространство несвязного объединения всех (M_α, x_α) по соотношению эквивалентности $\{x_1\} \sim \{x_2\} \sim \{x_3\} \sim \ldots$ Это факторпространство называется **букетом**, обозначается $\bigvee_\alpha (M_\alpha, x_\alpha)$. Также букет обозначается $(M_1, x_1) \vee (M_2, x_2) \vee (M_3, x_3) \vee \ldots$

Задача 10.24. Пусть все M_α связные (линейно связные, хаусдофовы). Докажите, что их букет связен (линейно связен, хаусдорфов).

Задача 10.25 (!). Пусть все M_α связные и односвязные. Докажите, что их букет односвязен.

Задача 10.26 (!). Пусть Γ – связный граф, у которого n вершин и $n + k - 1$ ребер. Докажите, что его топологическое пространство M_Γ гомотопически эквивалентно букету k окружностей.

Указание. Пусть у Γ есть ребро r, соединяющее две разные вершины v_1, v_2, Рассмотрим граф Γ', у которого $n-1$ вершин и $n+k-2$ ребер, полученный из Γ следующим образом. Из Γ выкидывается ребро r, а вершины v_1 и v_2 склеиваются в одну. Докажите, что M_Γ и $M_{\Gamma'}$ гомотопически эквивалентны.

Определение 10.6. Зададим множество $\{a_1, a_2, \ldots\}$ мощности N (N может быть как конечным кардиналом, так и бесконечным). **N-арное дерево** D_N – это бесконечный граф, который определяется следующим образом. Вершины D_N – конечные последовательности из символов a_i. Ребрами соединяются вершины, соответствующие $A_1 A_2 \ldots A_k$ и $A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}$ (все A_i принадлежат $\{a_1, a_2, \ldots\}$).

Задача 10.27. Докажите, что в каждую вершину D_N входят $N + 1$ ребер.

Задача 10.28 (!). Пусть M_N – топологическое пространство N-арного дерева, с естественной метрикой, построенной в начале этого листка. Докажите, что M_N является звездчатым (любые две точки соединяются единственной геодезической). Докажите, что оно стягиваемо.

Задача 10.29 (!). Рассмотрим $2N - 1$-арное дерево. Раскрасим его ребра в N цветов, таким образом, что к каждой вершине сходится по 2 ребра каждого цвета. Рассмотрим букет из N окружностей, и раскрасим каждую из окружностей в свой цвет. Рассмотрим отображение из M_{2N-1} в букет из N окружностей, переводящий вершины графа в вершины букета, а ребро цвета a_i в окружность такого же света. Докажите, что это универсальное накрытие.

Задача 10.30. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество мощности N, а $\mathcal{W}$ – множество конечных последовательностей (“слов”) из символов a_i, a_j^{-1}, в которых нигде не встречаются подряд $a_i a_i^{-1}$, а также $a_i^{-1} a_i$. Последовательность длины 0 обозначается e. Мы умножаем слова, записывая одно за другим и зачеркивая последовательно все $a_i a_i^{-1}$, $a_i^{-1} a_i$, которые встречаются подряд. Докажите, что $\mathcal{W}$ образует группу.

Определение 10.7. Эта группа называется **свободной группой, порожденной образующими** $\{a_1, a_2, \dots\}$, обозначается F_N.

Задача 10.31. Докажите, что F_1 изоморфно $\mathbb{Z}$.

Задача 10.32 (!). Пусть G – любая группа, а $\{g_1, g_2, \dots\}$ – набор элементов из G, пронумерованный $\{a_1, a_2, \dots\}$. Докажите, что существует единственный гомоморфизм $F_N \longrightarrow G$, переводящий a_i в g_i.

Задача 10.33 (!). Постройте свободное действие F_N на топологическом пространстве M_{2N-1} $2N-1$-арного дерева, транзитивное на вершинах.

Задача 10.34 (!). Докажите, что M_{2N-1}/F_N – букет N окружностей, а фундаментальная группа букета свободна.

Задача 10.35 (!). Докажите, что любой (возможно, бесконечный) граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

Задача 10.36 (!). Выведите из этого, что любая подгруппа свободной группы свободна.

Указание. Воспользуйтесь теорией Галуа для накрытий.

Задача 10.37 (*). Пусть $G_1, G_2, \dots$ – какой-то набор групп. Рассмотрим множество $\mathcal{W}$ конечных последовательностей неединичных элементов из разных G_i, таких, что элементы одной и той же группы нигде не идут подряд. Если дана любая последовательность A элементов из G_i, из нее можно получить элемент $\mathcal{W}$ следующим способом. Если в A идут подряд два элемента из G_i, мы их перемножаем и заменяем эти два элемента на произведение. Если в A встречается единица одний из групп, мы ее вычеркиваем. Повторим эту процедуру столько раз, сколько нужно, чтобы получить элемент из $\mathcal{W}$. Элементы $\mathcal{W}$ можно перемножать, записав одно слово после другого и применив вышеописанную процедуру. Докажите, что получится группа.

Определение 10.8. Эта группа называется **свободным произведением групп** G_1**,** G_2**,** $\dots$.

Задача 10.38. Докажите, что свободная группа от N образующих – это свободное произведение N копий $\mathbb{Z}$.

Задача 10.39. Докажите, что свободное произведение свободных групп свободно.

Задача 10.40 (*). Пусть $(M_1, x_1), (M_2, x_2), (M_3, x_3), \dots$ – набор связных топологических пространств с отмеченной точкой. Докажите, что $\pi_1(\bigvee_\alpha (M_\alpha, x_\alpha))$ изоморфна свободному произведению групп $\pi_1(M_1, x_1), \pi_1(M_2, x_2), \pi_1(M_3, x_3), \dots$.