Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Топология 2: Топология метрических пространств.

Определение 2.1. Пусть M – метрическое пространство, $X \subset M$ подмножество. Подмножество X называется **открытым**, если оно вместе с каждой точкой содержит некоторый ε-шар с центром в этой точке, и **замкнутым**, если дополнение к X открыто.

Задача 2.1. Докажите, что X открыто тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $\{a_i\}$, которая сходится к $x \in X$, все a_i, кроме конечного числа, содержатся в X.

Задача 2.2. Докажите, что объединение любого количества открытых множеств открыто. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Задача 2.3. Докажите, что замкнутый шар

$$\overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \ \mid\ d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

всегда замкнут.

Задача 2.4. Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Определение 2.2. Замыкание множества $A \subset M$ есть объединение A и всех предельных точек A.

Задача 2.5. Дано метрическое пространство, а в нем открытый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ и замкнутый шар $B_\varepsilon(x)$. Всегда ли $\overline{B}_\varepsilon(x)$ – замыкание $B_\varepsilon(x)$? Докажите, что замыкание любого подмножества всегда замкнуто.

Задача 2.6. Пусть A – подмножество в M не имеющее предельных точек (такое подмножество называется **дискретным**). Докажите, что $M\backslash A$ открыто.

Определение 2.3. Пусть M – компактное метрическое пространство, а $\varepsilon > 0$ – число. Пусть $R \subset M$ таково, что M покрывается объединением всех ε-шаров с центрами в R. Тогда R называется ε-**сетью**.

Задача 2.7. Пусть каждая последовательность в M имеет предельную точку. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

Указание. Пусть такой сети нет; тогда для каждого конечного множества R найдется точка x, отстоящая от R больше, чем на ε. Присоединим x к R, воспользуемся индукцией, и мы получим бесконечное дискретное подмножество M.

Определение 2.4. Пусть $X \subset M$ – подмножество, а $U_i \subset M$ – набор открытых подмножеств. Говорят, что U_i – **покрытие** X, если $X \subset \cup U_i$. Если из $\{U_i\}$ выкинуть какое-то количество открытых множеств, и оно останется покрытием, то, что получится, называется **подпокрытие**.

Задача 2.8. Пусть M – метрическое пространство, S – открытое покрытие M. Пусть каждая последовательность элементов M имеет предельную точку. Докажите, что тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса $< \varepsilon$ полностью содержится в одном из множеств покрытия S.

Указание. Пусть для каждого ε найдется точка x_ε, такая, что соответствующий ε-шар не содержится целиком ни в одном из множеств покрытия. Возьмем сходящуюся к нулю последовательность $\{\varepsilon_i\}$, и пусть x - предельная точка $\{x_{\varepsilon_i}$. Докажите, что x не содержится ни в одном из множеств покрытия S.

Задача 2.9 (!). (теорема Гейне-Бореля) Пусть $X \subset M$ – подмножество метрического пространства. Докажите, что следующие условия равносильны

а. Каждая последовательность точек из X имеет предельную точку в X.

б. Каждое покрытие X открытыми множествами имеет конечное подпокрытие.

Указание. Чтобы вывести (а) из (б), воспользуйтесь задачей 2.6. Чтобы вывести (б) из (а), возьмем любое покрытие S, число ε из задачи 2.8 и конечную ε-сеть. Каждый из шаров ε-сети содержится в каком-то из элементов $U_i \in S$. Докажите, что $\{U_i\}$ - конечное подпокрытие.

Определение 2.5. Пусть M, M' – метрические пространства, а $f: M \to M'$ – функция. Функция f называется **непрерывной**, если f переводит любую последовательность, сходящуюся к x, в последовательность, сходящуюся к $f(x)$, для каждого $x \in M$.

Задача 2.10 (!). Пусть X – любое подмножество в M. Докажите, что функция $f: M \to \mathbb{R}$, $x \stackrel{f}{\mapsto} d(\{x\}, X)$, непрерывна, где $d(\{x\}, X)$ (расстояние от x до X) определяется как $d(\{x\}, X) := \inf_{x' \in X} d(x, x')$.

Определение 2.6. Пусть M – метрическое пространство, $X \subset M$ – подмножество. Говорят, что подмножество X **компакт**, или **компактное множество**, если выполнено любое из условий задачи 2.9. Заметим, что это условия не зависит от вложения $X \hookrightarrow M$, а зависит только от метрики на X.

Задача 2.11 (!). Рассмотрим пополнение $\mathbb{Z}$ относительно нормы ν_p, определенное выше (оно называется "кольцо целых p-адических чисел" и обозначается $\mathbb{Z}_p$). Докажите, что оно компактно.

Указание. Докажите, что любое p-адическое число можно представить в форме $\sum a_i p^i$, где a_i целое число от 0 до $p-1$.

Задача 2.12. Докажите, что компактное подмножество M всегда замкнуто.

Указание. Докажите, что оно содержит все свои предельные точки.

Задача 2.13. Докажите, что замкнутое подмножество компакта всегда компактно.

Задача 2.14. Докажите, что объединение конечного числа компактных подмножеств компактно.

Задача 2.15 (!). Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на компакте. Докажите, что f достигает максимума.

Определение 2.7. Пусть X, Y – два подмножества метрического пространства. Обозначим через $d(X,Y)$ число $\inf_{x\in X, y\in Y}(d(x,y))$.

Задача 2.16 (!). Пусть X, Y – два компактных подмножества метрического пространства. Докажите, что в X, Y есть такие точки x, y, что $d(x,y) = d(X,Y)$.

Определение 2.8. Подмножество $Z \subset M$ называется ограниченным, если оно содежится в шаре $B_r(x)$ для каких-то $r \in \mathbb{R}, x \in M$.

Задача 2.17. Пусть $Z \subset M$ компактно. Докажите, что оно ограниченно.

Определение 2.9. Пусть M – метрическое пространство, а $X \subset M$ – его подмножество. Объединение всех открытых ε-шаров с центрами во всех точках X называется **ε-окрестностью** X.

Определение 2.10. Пусть M – метрическое пространство, а X и Y – ограниченные его подмножества. **Расстояние Хаусдорфа** $d_H(X,Y)$ есть инфимум всех ε таких, что Y содержится в ε-окрестности X, а X содержится в ε-окрестности Y.

Задача 2.18 (!). Докажите, что расстояние Хаусдорфа задает метрику на множестве $\mathcal{M}$ всех замкнутых ограниченных подмножеств M.

Задача 2.19. Пусть X, Y – ограниченные подмножества M, а $x \in X$. Докажите, что всегда $d_H(X,Y) \geqslant d(x,Y)$.

Задача 2.20 (*). Пусть M – полное метрическое пространство. Докажите, что $\mathcal{M}$ тоже полно.

Указание. Рассмотрим последовательность Коши $\{X_i\}$ подмножеств M. Пусть $\mathfrak{S}$ – множество всех последовательностей Коши $\{x_i\}$ с $x_i \in X_i$. Пусть X множество предельных точек последовательностей из $\mathfrak{S}$. Докажите, что $\{X_i\}$ сходится к X.

Задача 2.21 (*). Пусть $\{X_i\}$ – последовательность Коши компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M, а X – ее предел. Докажите, что X компактен.

Указание. Перейдя к подпоследовательности v $\{X_i\}$, можно предположить, что $d_H(X_i, X_j) < 2^{-\min(i,j)}$. Пусть $\{x_i\}$ – последовательность точек из X. Для каждого X_j найдите такую последовательность $\{x_i(j) \in X_j\}$, что $d(x_i(j), x_i) = d(x_i, X_j)$. Поскольку X_j компактен, эта последовательность всегда имеет предельную точку. Выберем в $\{x_i(0)\}$ предельную точку $x(0)$, и заменим $\{x_i\}$ на такую его подпоследовательность, что $\{x_i(0)\}$ сходится к $x(0)$. Потом заменим $\{x_i\}, i > 0$ на такую подпоследовательность, чтобы $\{x_i(1)\}$ сходилось к $x(1)$. На k-м шаге мы заменяем $\{x_i\}, i > k$ на подпоследовательность таким образом, чтобы $\{x_i(k)\}$ сходилось к $x(k)$. Докажите, что в результате получится такая последовательность $\{x_i\}$, что $\{x_i(k)\}$ сходится к $x(k)$ для всех

k. Докажите, что эту операцию можно провести таким образом, что $d(x_i(k), x(k)) < 2^{-i}$. Используя приведенную выше оценку $d_H(X_i, X_j) < 2^{-\min(i,j)}$, докажите, что $d(x_i(k), x_i) < 2^{-\min(k,j)+2}$. Выведите из этого, что $\{x_i\}$ – последовательность Коши.

Задача 2.22 (!). M компактно, $X \subset$ – любое подмножество. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечное множество R такое, что $d_H(R, X) < \varepsilon$. (Это утверждение можно выразить так: "X допускает аппроксимацию конечными множествами, с заданной наперед точностью")

Указание. Найдите в X конечную ε-сеть.

Задача 2.23 (*). Пусть M компактно. Докажите, что $\mathcal{M}$ тоже компактно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 2.11. Пусть M – метрическое пространство. Говорят, что M **локально компактно**, если для любой точки $x \in M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Задача 2.24. Пусть M – локально компактное метрическое пространство, $\overline{B}_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар, который компактен. Докажите, что $\overline{B}_\varepsilon(x)$ содержится в открытом множестве Z, замыкание которого компактно.

Указание. Покройте $\overline{B}_\varepsilon(x)$ шарами, замыкание которых компактно, и выберите конечное подпокрытие.

Задача 2.25 (!). В условиях предыдущей задачи докажите, что для какого-то $\varepsilon' > 0$ замыкание открытого шара $B_{\varepsilon+\varepsilon'}(x)$ компактно.

Указание. Возьмите Z такое, как в предыдущей задаче. Возьмите $\varepsilon' = d(M \backslash Z, \overline{B}_\varepsilon(x))$.

Определение 2.12. Пусть (M, d) – метрическое пространство. Мы говорим, что M **удовлетворяет условию Хопфа-Ринова**, если для любых двух точек $x, y \in M$ и таких чисел $r_1, r_2 > 0$, что $r_1 + r_2 < d(x, y)$, имеем

$$d(B_{r_1}(x), B_{r_2}(y)) = d(x, y) - r_1 - r_2.$$

Задача 2.26 (*). Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, $x \in M$ – точка, а $\varepsilon > 0$ – такое число, что $\overline{B}_{\varepsilon'}(x)$ компактен для всех $\varepsilon' < \varepsilon$. Докажите, что шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ компактен.

Указание. Пусть $\varepsilon_i < \varepsilon$ – последовательность, которая сходится к ε. Пользуясь условием Хопфа-Ринова, докажите, что $\{\overline{B}_{\varepsilon_i}(x)\}$ – последовательность Коши в смысле метрики Хаусдорфа, и сходится к $\overline{B}_\varepsilon(x)$. Воспользуйтесь тем, что, как доказано выше, предел такой последовательности компактен.

Задача 2.27 (*). (Теорема Хопфа-Ринова, I) Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова. Докажите, что каждый замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ в M компактен.

Задача 2.28 (*). Придумайте пример полного локально компактного метрическое пространства, в котором есть некомпактный замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$.

Замечание. Разумеется, такое пространство не может удовлетворять условию Хопфа-Ринова (Задача 2.27).

Задача 2.29. Пусть M – такое метрическое пространство, что каждый замкнутый шар $\overline{B}_\varepsilon(x)$ в M компактен. Докажите, что M полно.

Задача 2.30 (*). Пусть M – локально компактное полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, $x, y \in M$. Докажите, что есть такая точка $z \in M$, что $d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y)$.

Задача 2.31 (*). Пусть S – множество всех рациональных чисел вида $\frac{n}{2^k}$, $n \in \mathbb{Z}$ на отрезке $[0,1]$. В условиях предыдущей задачи, докажите, что существует такое отображение $S \xrightarrow{\xi} M$, что $d(\xi(a), \xi(b)) = |a-b|d(x,y)$, причем $\xi(0) = x$, а $\xi(1) = y$.

Задача 2.32 (*). (Теорема Хопфа-Ринова, II) Пусть M – локально компактное полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, $x, y \in M$. Докажите, что отображение ξ можно естественно продолжить на пополнение S относительно стандартной метрики, получив такое отображение $[0,1] \xrightarrow{\bar{\xi}} M$, что $\bar{\xi}(0) = x$, $\bar{\xi}(1) = y$, и для всякой пары вещественных числа $a, b \in [0,1]$ имеем $d((\bar{\xi}(a), \bar{\xi}(b)) = |a-b|d(x,y)$.

Замечание. Такое отображение называется **геодезическим**. Теорему Хопфа-Ринова можно сформулировать так – для любых двух точек в полном метрическом локально компактном пространстве, удовлетворяющим условию Хопфа-Ринова, найдется геодезическая, которая их соединяет.

Определение 2.13. Такое пространство называется **геодезически связным**

Задача 2.33 (*). Приведите пример метрического пространства, которое не локально компактно, но тем не менее геодезически связно.

Задача 2.34. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ – векторное пространство со стандартной (евклидовой) метрикой. Докажите, что геодезические в V – это отрезки (множества вида $ax + (1-a)y$, где a пробегает отрезок $[0,1] \subset \mathbb{R}$, а $x, y \in V$).

Задача 2.35 (*). Пусть d – метрика на $\mathbb{R}^n$, ассоциированная с нормой $(x_1, x_2, ...) \mapsto \max |x_i|$. Докажите, что она удовлетворяет условию Хопфа-Ринова. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с такой метрикой геодезически связно. Опишите геодезические.

Задача 2.36 (*). Пусть d – метрика на $\mathbb{R}^n$, ассоциированная с нормой $(x_1, x_2, ...) \mapsto \sum |x_i|$. Докажите, что она удовлетворяет условию Хопфа-Ринова. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с такой метрикой геодезически связно. Опишите геодезические.

Задача 2.37 (*). Верно ли, что метрика d, определенная нормой, всегда удовлетворяет условию Хопфа-Ринова?

Определение 2.14. Пусть X – метрическое пространство, а $0 < k < 1$ – вещественное число. Отображение $f: X \to X$ называется **сжимающим с коэффициентом** k, если $kd(x,y) \geqslant d(f(x), f(y))$.

Задача 2.38 (!). Пусть X – метрическое пространство, а $f: X \to X$ – сжимающее отображение. Докажите, что для каждого $x \in X$ последовательность $\{a_i\}$, $a_0 := x, a_1 := f(x), a_2 := f(f(x)), a_3 := f(f(f(x))), ...$ – последовательность Коши.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $d(a_i, a_{i+1}) = k^i d(x, f(x))$, и выведите из этого сходимость ряда $\sum d(a_i, a_{i+1})$

Задача 2.39 (!). (Теорема о сжимающих отображениях) Пусть X – полное метрическое пространство, а $f: X \to X$ – сжимающее отображение. Докажите, что f имеет неподвижную точку

Указание. Возьмите предел последовательности $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$.