Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Листок ТОПОЛОГИЯ 4. Произведение пространств

Определение 4.1. Пусть дано топологическое пространство M и набор B из открытых подмножеств в M. Набор B называется **предбазой** для топологии на M, если любое открытое множество можно получить (возможно, бесконечным) объединением конечных пересечений открытых подмножеств, принадлежащих B.

Задача 4.1. Рассмотрим $\mathbb{R}$ с дискретной топологией. Докажите, что в нем нет счетной предбазы.

Задача 4.2 (!). Пусть задано топологическое пространство M со счетной предбазой. Докажите, что у M есть счетная база.

Задача 4.3 (*). Дано конечное множество M, $|M| = 2^n$, с дискретной топологией, а B – предбаза в M. Докажите, что $|B| \geqslant n$. Найдите предбазу, в которой $2n$ элементов.

Задача 4.4. Рассмотрим $\mathbb{R}$ с естественной топологией, и пусть B – множество всех интервалов, у которых концы – конечные двоичные дроби. Докажите, что это база в топологии $\mathbb{R}$.

Задача 4.5. Пусть дан набор подмножеств B в множестве M, такой, что $\cup B = M$. Рассмотрим все подмножества, которые можно получить из элементов B, а также M i $\emptyset$ конечными пересечениями и произвольными объединениями. Докажите, что получится топология на M.

Определение 4.2. Такая топология называется **топологией, заданной предбазой** B.

Определение 4.3. Пусть M_1, M_2 – топологические пространства. Рассмотрим топологию S на $M_1 \times M_2$, заданную предбазой из подмножеств вида $U_1 \times M_2$, $M_1 \times U_2$, где U_1, U_2 открыты в M_1, M_2. Тогда $(M_1 \times M_2, S)$ называется **произведением** M_1 **и** M_2.

Задача 4.6. Докажите, что естественная проекция $M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ непрерывна. Докажите, что множества вида $U_1 \times U_2$ задают базу в топологии на $M_1 \times M_2$.

Задача 4.7. Даны отображения топологических пространств $X \xrightarrow{\gamma_1} M_1$, $X \xrightarrow{\gamma_2} M_2$. Докажите, что они непрерывны тогда и только тогда, когда произведение

$$X \xrightarrow{\gamma_1 \times \gamma_2} M_1 \times M_2$$

непрерывно.

Задача 4.8. Пусть M_1, M_2 удовлетворяет условию из списка, приведенного ниже. Докажите, что $M_1 \times M_2$ удовлетворяет тому же условию.

a. Свойство отделимости T1.

б. [!] Условие Хаусдорфа (T2).

в. Свойство отделимости T3.

г. Сепарабельность.

д. [!] Наличие счетной базы окрестностей у каждой точки.

е. Наличие счетной базы.

Задача 4.9 (**). Верно ли это для аксиомы отделимости T4?

Определение 4.4. Отображение

$$x \xrightarrow{\Delta} (x, x) \in X \times X$$

называется **диагональным вложением**, его образ – **диагональю** в $X \times X$.

Задача 4.10. Докажите, что диагональное вложение является гомеоморфизмом на свой образ (топология на $\Delta \subset X \times X$ предполагается индуцированной с $X \times X$).

Указание. Воспользуйтесь задачей 4.7.

Задача 4.11. Докажите, что X удовлетворяет условию T1 тогда и только тогда, когда диагональ является пересечением всех открытых множеств, ее содержащих.

Задача 4.12 (!). Докажите, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ замкнута в $X \times X$.

Задача 4.13. Докажите, что топология на X дискретна тогда и только тогда, когда диагональ открыта в $X \times X$.

Задача 4.14. Пусть график $\Gamma \subset X \times Y$ отображения топологических пространств $X \xrightarrow{\gamma} Y$ замкнут. Верно ли, что γ непрерывно?

Задача 4.15 (!). Пусть $X \xrightarrow{\gamma} Y$ – морфизм топологических пространств, причем Y хаусдорфово. Докажите, что график γ замкнут.

Задача 4.16. Пусть M_1, M_2 – метрические пространства, $M = M_1 \times M_2$ – их произведение, а d – одна из перечисленных ниже функций на $M \times M$. Докажите, что d задает метрику на M.

а. $d((m_1, m_2), (m_1', m_2')) = d(m_1, m_1') + d(m_2, m_2')$

б. $d((m_1, m_2), (m_1', m_2')) = \max(d(m_1, m_1'), d(m_2, m_2'))$

в. [!] $d((m_1, m_2), (m_1', m_2')) = \sqrt{d(m_1, m_1')^2 + d(m_2, m_2')^2}$

Задача 4.17 (!). Докажите, что три метрические структуры из предыдущей задачи задают на $M_1 \times M_2$ одну и ту же топологию. Докажите, что эта топология эквивалентна топологии произведения на $M_1 \times M_2$, которое рассматривается как произведение топологических пространств.

Тихоновский куб и гильбертов куб

Определение 4.5. Пусть I – некоторый набор индексов (возможно, несчетный), а $M = X^I$ – множество отображений из I в фиксированное топологическое пространство X. На X^I можно смотреть как на множество последовательностей точек X, индексированное I, либо как на бесконечное произведение X с собой. Обозначим через $W(i, U) \subset X^I$ множество всех отображений $I \longrightarrow X$, переводящих заданный индекс i в элемент из подмножества $U \subset X$. Зададим предбазу B топологии на X^I таким образом: $U \in B$, если $U = W(i, U)$ для какого-то индекса $i \in I$ и какого-то открытого подмножества $U \subset X$. Такая топология называется **слабой**, или **тихоновской**.

Задача 4.18 (!). Дана последовательность точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ в X^I. Докажите, что она сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\alpha_k(i)$ сходится для каждого индекса $i \in I$.

Замечание. Утверждение предыдущей задачи часто формулируют так: "пространство X^I со слабой топологией есть множество отображений из I в X, с топологией поточечной сходимости".

Определение 4.6. Пусть I – некоторый набор индексов. Пространство $[0,1]^I$ со слабой топологией называется **тихоновским кубом**.

Задача 4.19. Пусть на топологическом пространстве M задан набор непрерывных функций $\alpha_i : M \longrightarrow [0,1]$, проиндексированных набором индексов I. Докажите, что отображение

$$\prod \alpha_i : \ m \longrightarrow \prod_{i \in I} \alpha_i(m)$$

в тихоновский куб $[0,1]^I$ непрерывно.

Задача 4.20. Докажите, что любая точка тихоновского куба замкнута.

Задача 4.21 (*). Докажите, что тихоновский куб удовлетворяет условиям T2 и T3.

Задача 4.22 (!). Дан тихоновский куб $[0,1]^I$, где I счетно. Докажите, что у него есть счетная база.

Указание. Докажите, что совокупность всех $U = W(i,]a, b[)$ с рациональными a, b задает счетную предбазу в $[0,1]^I$, и воспользуйтесь задачей 4.2.

Задача 4.23 (**). Докажите, что если множество I имеет мощность континуума или больше, то тихоновский куб $[0,1]^I$ несепарабелен.

Указание. Пусть задано счетное подмножество W хаусдорфова пространства. Докажите, что мощность замыкания W не больше континуума.

Задача 4.24 (!). Рассмотрим множество $M = [0,1]^{\mathbb{N}}$ – множество последовательностей вещественных чисел в $[0,1]$, индексированных $\mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$d(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}) = \sqrt{\sum i^{-2} |\alpha_i - \beta_i|^2}.$$

Докажите, что эта функция хорошо определена и задает метрику на $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Определение 4.7. Метрическое пространство $[0,1]^{\mathbb{N}}$ с метрикой, построенной выше, называется **гильбертовым кубом**.

Задача 4.25 (!). Пусть задана последовательность $\{\alpha_i(n)\}$ точек в $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Докажите, что она сходится в тихоновской топологии тогда и только тогда, когда она сходится в топологии гильбертова куба.

Задача 4.26 (*). Выведите из этого, что тождественное отображение задает гомеоморфизм гильбертова куба и тихоновского куба.

Замечание. Мы получили, что если множество индексов I счетно, то тихоновский куб $[0,1]^I$ метризуем.

Задача 4.27 (*). Пусть множество индексов I несчетно. Будет ли тихоновский куб $[0,1]^I$ метризуем?

Лемма Урысона и метризация топологических пространств

Определение 4.8. Пусть даны непересекающиеся замкнутые подмножества $A, B \subset M$ топологического пространства M. Непрерывная функция $f: M \longrightarrow [0,1]$ называется **функцией Урысона**, если $f(A) = 0, f(B) = 1$.

Задача 4.28. Пусть для любых непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset M$ существует функция Урысона, и верно условир T1. Докажите, что M удовлетворяет условию отделимости T4.

Задача 4.29 (*). Пусть M удовлетворяет условию T4, а $A, B \subset M$ – непересекающиеся замкнутые подмножества. Докажите, что можно найти последовательность окрестностей $U_{p/2^q} \supset A$, индексированную рациональными числами вида $0 < p/2^q < 1$, и удовлетворяющую следующим условиям:

(i) для всех p, q, B не пересекается с $U_{p/2^q}$.

(ii) Если $p_1/2^{q_1} < p_2/2^{q_2}$, то замыкание $U_{p_1/2^{q_1}}$ содержится в $U_{p_2/2^{q_2}}$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией.

Задача 4.30 (*). В условиях предыдущей задачи, определим функцию $f: M \longrightarrow [0,1]$ формулой

$$f(m) = \sup\left\{p/2^q \;\middle|\; m \notin U_{p/2^q}\right\}$$

вне A и положим f равной нулю на A. Докажите, что f непрерывна и является функцией Урысона.

Указание. Докажите, что отрезки вида $]p_1/2^{q_1}, p_2/2^{q_2}[$ задают предбазу топологии в $[0,1]$. Докажите, что

$$f^{-1}(]p_1/2^{q_1}, p_2/2^{q_2}[) = U_{p_2/2^{q_2}} \backslash \overline{U_{p_1/2^{q_1}}}.$$

Выведите из этого, что f непрерывна.

Замечание. Мы получили следующую "лемму Урысона": если в M выполняется условие T4, то для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств M существует функция Урысона.

Задача 4.31 (*). Пусть M – хаусдорфово пространство со счетной базой B, удовлетворяющее условию T4, I – множество всех пар $U_1, U_2 \in B$, таких, что замыкания U_1, U_2 не пересекаются, F_{U_1,U_2} – соответствующие функции Урысона, а $F: M \longrightarrow [0,1]^I$ – отображение в тихоновский куб, заданное как $F(m) = \prod F_{U_1,U_2}$. Докажите, что F непрерывно и инъективно.

Задача 4.32 (*). В условиях предыдущей задачи, обозначим за $G: F(M) \longrightarrow M$ отображение, обратное F. Пусть дана последовательность точек $\{x_i\}$ такая, что $F_{U_1,U_2}(x_i)$ сходится для любой пары (U_1, U_2) в I. Выведите из этого, что последовательность $\{x_i\}$ сходится. Докажите, что G непрерывно.

Задача 4.33 (*). Докажите, что любое хаусдорфово топологическое пространство M с счетной базой, удовлетворяющее условию T4 можно реализовать как топологическое подпространство в гильбертовом кубе.

Замечание. Мы получили следующую **теорему о метризации**. Всякое топологическое T4-пространство со счетной базой метризуемо.

Задача 4.34. Докажите, что любое подмножество гильбертова куба - польское.

Задача 4.35 (*). Любое ли метризуемое пространство – T4 и со счетной базой?