Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ЛИСТОК ТОПОЛОГИЯ 5: Компактность

Определение 5.1. Пусть M – топологическое пространство. Назовем **покрытием** M любой набор открытых подмножеств $U_i \subset M$ (возможно, бесконечный, или даже несчетный), для которого $M = \bigcup U_i$. Пространство M называется **компактным**, или просто **компактом**, если из каждого открытого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие. Подмножество $Z \subset M$ топологического пространства M называется компактным, если оно компактно в индуцированной топологии.

Задача 5.1. Докажите, что отрезок $[0,1]$ компактен. Когда компактно множество с дискретной топологией? С кодискретной топологией?

Задача 5.2 (*). Пусть в M задана такая топология: открытые множества это дополнения к конечным подмножествам (такая топология называется **кофинитной**). Найдите все компактные подмножества в M.

Задача 5.3 (!). Пусть Z компактно, а $Z' \subset Z$ замкнуто в Z. Докажите, что Z' тоже компактно. Следует ли из компактности подмножества его замкнутость?

Задача 5.4. Пусть топологическое пространство M хаусдорфово, Z – произвольное подмножество M, а $x \notin Z$ – любая точка.

а. Докажите, что у Z есть такое открытое покрытие $\{U_i\}$, что замыкание каждого U_i не содержит x.

б. [*] Приведите пример нехаусдорфова T1-пространства, где это не выполнено.

Задача 5.5 (!). Пусть M хаусдорфово. Докажите, что любое компактное подмножество в M замкнуто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.6. Даны два компактных подмножества хаусдорфова пространства. Докажите, что у них есть непересекающиеся открытые окрестности.

Задача 5.7 (!). Дано компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что для него выполняется условие отделимости T4.

Задача 5.8 (*). Существует ли компактное, хаусдорфово, неметризуемое топологическое пространство?

Определение 5.2. Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у любой точки найдется окрестность, замыкание которой компактно.

Задача 5.9. Дано локально компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнено условие T3.

Задача 5.10 (**). Существует ли локально компактное, хаусдорфово топологическое пространство, в котором не выполнено первое условие счетности?

Задача 5.11 (**). Существует ли счетное, хаусдорфово топологическое пространство, которое не локально компактно?

Задача 5.12. Дано хаусдорфово топологическое пространство X. Обозначим через $\widehat{X}$ множество $X\bigcup\{\infty\}$ (X, к которому добавили еще одну точку, обозначенную как ∞) со следующей топологией: $U\subset\widehat{X}$ открыто либо если $\infty\in U$, а дополнение к U компактно как подмножество X, либо если $\infty\notin X$, и U открыто как подмножество X. Докажите, что это действительно топология, и пространство $\widehat{X}$ компактно.

Определение 5.3. Пространство $\widehat{X}$ называется **одноточечной компактификацией** пространства X.

Задача 5.13 (*). Всегда ли $\widehat{X}$ хаусдорфово?

Задача 5.14. Пусть $X=\mathbb{R}^n$ с естественной топологией. Докажите, что $\widehat{X}$ гомеоморфно n-мерной сфере.

Задача 5.15. Дано топологическое пространство M, и подмножество Z в нем. Докажите, что следующие условия эквивалентны.

(i) У любой точки $z\in Z$ существует окрестность $U\ni z$, не содержащая других точек из Z.

(ii) M индуцирует на Z дискретную топологию.

(iii) Z не содержит своих предельных точек.

Определение 5.4. Замкнутое подмножество $Z\subset M$, удовлетворяющее одному из условий задачи 5.15, называется **дискретным**.

Задача 5.16. Пусть у хаусдорфова топологического пространства $Z\subset M$ есть бесконечное дискретное подмножество. Докажите, что M некомпактно.

Пусть дан набор Z_i подмножеств множества M. Будем говорить, что этот набор множеств **монотонный**, если для любых Z_i, Z_j из нашего набора $Z_i\subset Z_j$ или $Z_j\subset Z_i$.

Задача 5.17. Докажите, что если топологическое пространство M компактно, то любой монотонный набор непустых замкнутых подможеств $Z_i\subset M$ имеет непустое пересечение $\cap_i Z_i$.

Задача 5.18. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда у M нет бесконечных дискретных подмножеств.

Указание. Если M содержит бесконечное дискретное подмножество, из задачи 5.17 следует, что M некомпактно. Если, наоборот, M некомпактно, то у M есть счетное покрытие $S = \{U_i\}$, такое, что никакое конечное подмножество S не покрывает M. Заменив U_i на объединение всех $U_j, j \geqslant i$, можно считать, что $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset ...$, причем ни один из U_i не содержит M. Взяв дополнения получаем набор замкнутых подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset ...$, с нулевым пересечением. Возьмите в каждом A_i точку, докажите, что получится дискретное множество.

Задача 5.19 (!). Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность точек из M имеет предельную точку.

Замечание. Это свойство называется **слабой секвенциальной компактностью**.

Задача 5.20 (**). Существует ли слабо секвенциально компактное, некомпактное хаусдорфово пространство?

Задача 5.21 (*). Дано топологическое пространство M, не обязательно хаусдорфово.

а. Может ли компактное подмножество M содержать бесконечное дискретное подмножество?

б. Может ли существовать ли некомпактное подмножество M, не содержащее бесконечных дискретных подмножеств?

в. **(**)** Пусть M хаусдорфово. Существует ли некомпактное подмножество M, не содержащее бесконечных дискретных подмножеств?

Задача 5.22 (!). Пусть $f: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что для любого компактного подмножества $Z \subset M$, $f(Z)$ всегда компактно.

Задача 5.23. Пусть дано подмножество $Z \subset \mathbb{R}$.

а. Докажите, что Z компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено (ограничено - значит содержится в некотором отрезке $[a, b]$).

б. Докажите, что Z компактно тогда и только тогда, когда любое его подмножество имеет супремум и инфимум в Z.

Задача 5.24 (!). Пусть $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что f достигает максимума и минимума на любом компактном подмножестве M.

Задача 5.25 (*). Пусть дано некомпактное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, которое удовлетворяет свойству отделимости T4. Постройте непрерывную функцию $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$, которая не достигает максимума.

Указание. Пусть $\{x_i\}$ – счетное дискретное подмножество M. Воспользовавшись свойством T4, постройте набор таких окрестностей $U_i \supset x_i$, что замыкание U_i не пересекается с замыканием $\bigcup_{j \neq i} U_j$. Теперь примените лемму Урысона к замкнутым множествам $\{x_i\}$, $M \backslash U_i$, и просуммируйте полученные функции Урысона f_i с правильно подобранными коэффициентами.

Задача 5.26. Пусть $f: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Докажите, что f переводит замкнутые множества в замкнутые.

Задача 5.27. Пусть $f: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Предположим, что f взаимно однозначно. Докажите, что f – гомеоморфизм.

Задача 5.28. Придумайте такое непрерывное взаимно однозначное отображение топологических пространств $f: M \longrightarrow N$, что M компактно, но f – не гомеоморфизм. (N не хаусдорфово).

Компакты и произведения

Определение 5.5. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется **собственным**, если для каждого компактного $K \subset Y$ прообраз $f^{-1}(K) \subset X$ компактен.

Задача 5.29 (!). Пусть пространство Y хаусдорфово и имеет счетную базу окрестностей в точке. Докажите, что любое собственное отображение $f : X \to Y$ переводит замкнутые подмножества X в замкнутые подмножества Y.

Указание. Пусть есть замкнутое $Z \subset Y$, образ которого не замкнут. Выберите последовательность точек $y_i \in f(Z)$, которая сходится к точке $y \in Y$, не лежащей в $f(Z)$.

Задача 5.30 (**). Верно ли утверждение предыдущей задачи без предположения счетной базы?

Задача 5.31 (!). Пусть X, Y – компактные топологические пространства. Докажите, что произведение $X \times Y$ компактно.

Указание. Воспользовавшись тем, что множества вида $U \times V$, U открыто в X, V открыто в Y задают базу топологии на $X \times Y$, докажите сначала, что достаточно рассматривать покрытия $X \times Y$ множествами такого вида. Затем для каждой точки $y \in Y$ выберите конечное подпокрытие подмножества $X \times \{y\} \subset X \times Y$, состоящее из каких-то множеств $U_i \times V_i$, и заметьте, что множества $V_y = \cap V_i$ образуют открытое покрытие пространства Y.

Задача 5.32. Дано подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что следующие свойства равносильны

(i) X компактно

(ii) X замкнуто и ограниченно (т.е. содержится в каком-то шаре).

Определение 5.6. Непрерывное отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется **открытым**, если образ любого открытого множества открыт.

Задача 5.33 (*). Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – открытое отображение, а слои $f^{-1}(y), y \in Y$ компактны. Всегда ли f собственное?

Теорема Тихонова

Задача 5.34. Пусть дана последовательность $a_i(n)$ отображений из $\mathbb{N}$ в $[0,1]$. Докажите, что можно выбрать такую подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots$, что $\{a_{i_k}(n)\}$ сходится для любого n.

Задача 5.35 (!). Выведите из этого, что тихоновский куб $[0,1]^{\mathbb{N}}$ компактен.

Задача 5.36 (*). Дано топологическое пространство M. Пусть задано такое (возможно, несчетное) множество $\{V_\alpha\}$ покрытий M, что каждое V_α содержит $V_{\alpha'}$ либо содержится в нем (иначе говоря, $\{V_\alpha\}$ – набор покрытий, получающихся друг из друга присоединением каких-то элементов). Пусть из каждого V_α нельзя выбрать конечное подпокрытие. Докажите, что из объединения всех V_α тоже нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Задача 5.37 (*). Используя лемму Цорна, докажите, что у всякого некомпактного подмножества $X \subset M$ найдется покрытие $\{V_\alpha\}$, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия, а если добавить к $\{V_\alpha\}$ любое не содержащееся в нем открытое множество, то из полученного покрытия можно будет выбрать конечное подпокрытие.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Мы будем называть такие покрытия **максимальными**.

Задача 5.38 (*). Пусть дано максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$ некомпактного топологического пространства M. Докажите, что если открытые множества U_1, U_2 не лежат в $\{V_\alpha\}$, и их пересечение непусто, то оно тоже не лежит в $\{V_\alpha\}$. Докажите, что любое непустое конечное пересечение открытых множеств, не лежащих в $\{V_\alpha\}$, тоже не принадлежит $\{V_\alpha\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.39 (*). Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии R. Пусть дано некомпактное подмножество $X \subset M$ и максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$. Докажите, что в $\{V_\alpha\}$ можно выбрать подпокрытие из R.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Мы получили следующую теорему (теорема Александера о предбазе). Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии S. Тогда подмножество $X \subset M$ компактно тогда и только тогда, когда из любого покрытия X элементами из S можно выбрать конечное подпокрытие. Теорема Александера использует аксиому выбора и (как показал Кэли) эквивалентна ей.

Задача 5.40 (*). Выведите из этого, что тихоновский куб $[0,1]^I$ компактен для любого множества I.

Указание. Рассмотрите предбазу для топологии на тихоновском кубе, составленную из подмножеств вида $[0,1] \times [0,1] \times \dots \times]a,b[\times [0,1] \times \dots$ (на одном месте стоит открытый интервал). Воспользуйтесь теоремой Александера.

Замечание. Компактность тихоновского куба эквивалентна такому утверждению. Рассмотрим пространство $\operatorname{Map}(I, [0,1])$ отображений из множества I в отрезок $[0,1]$, с топологией поточечной сходимости. Тогда $\operatorname{Map}(I, [0,1])$ компактно. В частности, из любой последовательности $\{a_i(x)\}$ отображений можно выбрать такую подпоследовательность $\{a_{i_k}(x)\}$, что $\{a_{i_k}(x)\}$ сходится в любом $x \in I$.

Определение 5.7. Пусть M – топологическое пространство, I – некоторое множество, а M^I – пространство отображений из I в M, то есть произведение I копий M. Для $x \in I$ и открытого множества $U \subset M$ рассмотрим подмножество $U(x) \subset M^I$, состоящее из всех отображений, переводящих x в U. Определим на M^I топологию с предбазой, состоящей из всех $U(x)$. Такая топология называется **тихоновской** (также **слабой** или **топологией поточечной сходимости**).

Задача 5.41 (*). Пусть M компактно. Выведите из теоремы Александера, что M^I с тихоновской топологией компактно.

Основная теорема алгебры

Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ – полином положительной степени с комплексными коэффициентами. Мы рассматриваем P как функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Как топологическое пространство, $\mathbb{C}$ отождествляется с $\mathbb{R}^2$. Мы хотим доказать, что $P(x) = 0$, для какого-то $x \in \mathbb{C}$.

Задача 5.42. Докажите, что P непрерывен.

Задача 5.43. Докажите, что есть C такое, что для всех $|x| > C$, имеем $\frac{|P(x) - x^n|}{|x^n|} < 1/2$.

Указание. Возьмите $|x| > 2\max(1, \sum |a_i|)$.

Задача 5.44. Докажите, что есть C такое, что для всех $|x| > C$ то $|P(x)| > R^n$.

Указание. Возьмите $|x| > 2R\max(1, \sum |a_i|)$,

Задача 5.45. Выведите из этого, что $|P|$ достигает локального минимума в точке $a \in \mathbb{C}$.

Указание. Мы приблизили многочлен $|P|$ многочленом x^n, скорость роста которого нам известна. Из этого мы вывели, что $|P(x)| > R^n$, когда $|x|$ достаточно велик. Поэтому минимум $|P|$ на круге $|x| \leqslant R$ достигается внутри круга, а не на его границе.

Для упрощения обозначений, мы будем в дальнейшем предполагать, что минимум $|P|$ достигается в нуле. Мы хотим доказать, что минимум $|P|$ равен нулю. Пусть это не так. Пусть k – самое маленькое число среди $1, 2, 3, \dots, n$, для которого $a_k \neq 0$. Домножив P на a_0^{-1}, и сделав замену $x = z\sqrt[k]{a_k^{-1}}$, мы получим многочлен вида

$$Q(z) = 1 + z^k + b_{k+1}z^{k+1} + b_{k+2}z^{k+2} + \dots$$

Задача 5.46. Докажите, что для любого комплексного z, такого, что $|z| < 1$, выполняется

$$|Q(z) - 1 - z^k| < |z^{k+1}|(\sum |b_i|).$$

Задача 5.47. Докажите, что существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \varepsilon$, имеем

$$\frac{|Q(z) - 1 - z^k|}{|z^k|} < \frac{1}{2}.$$

Указание. Возьмите $|z| < \frac{1}{2}\max\left(1, \sum |b_i|\right)^{-1}$

Задача 5.48. Выведите из этого, что для любого положительного вещественного $c < \varepsilon$ и любого комплексного z, для которого $z^k = -c$, выполняется

$$|Q(z) - 1 + c| < c/2.$$

Замечание. В окрестности нуля, мы приблизили Q многочленом $1 + z^k$. Пользуясь этим приближением, мы находим, что $|Q(\sqrt[k]{-\varepsilon})| < |Q(0)|(1 - \frac{1}{2}\varepsilon)$ для достаточно малых ε. Следовательно, локальный минимум многочлена это всегда 0.

Задача 5.49 (!). Докажите Основную Теорему Алгебры: каждый многочлен P положительной степени имеет корень в $\mathbb{C}$.