

Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ТОПОЛОГИЯ 8: Фундаментальная группа и пространство петель

Линейная связность

Определение 8.1. Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что **путем** в M называется непрерывное отображение $[a, b] \xrightarrow{\phi} M$. В этом случае говорится, что путь ϕ **соединяет точки** $\phi(a)$ и $\phi(b)$. M называется **линейно связным**, если любые две точки M можно соединить путем $[a, b] \xrightarrow{\phi} M$.

Задача 8.1. Пусть a, b, c лежат в M , причем a можно соединить путем с b , а b с c . Докажите, что a можно соединить путем с c .

Задача 8.2. Выведите из этого, что объединение линейно связных подмножеств M , содержащих выбранную точку $x \in M$, линейно связно.

Определение 8.2. Объединение всех линейно связных подмножеств, содержащих какую-то фиксированную точку x , называется **компонентой линейной связности** M .

Задача 8.3. Рассмотрим следующее подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$: график функции $\sin(1/t)$, объединенный с отрезком $[(0, 1), (0, -1)]$. Докажите, что X локально компактно, связно, и не линейно связно. Найдите компоненты линейной связности.

Задача 8.4 (*). Найдите компактное и связное метризуемое топологическое пространство, имеющее бесконечное количество компонент линейной связности.

Определение 8.3. Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор топологических пространств, индексированный множеством \mathfrak{A} . Несвязное объединение $\coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} M_\alpha$ – это топологическое пространство, точками которого являются пары $(\alpha, m) \mid \alpha \in \mathfrak{A}, m \in M_\alpha$, а база топологии задается открытыми множествами во всех M_α .

Задача 8.5. Докажите, что несвязное объединение одноточечных пространств дискретно. Докажите, что естественная проекция $\coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} M_\alpha \longrightarrow \mathfrak{A}$ на \mathfrak{A} с дискретной топологией непрерывна.

Определение 8.4. Топологическое пространство M называется **локально связным** (локально линейно связным), если каждая точка $x \in M$ содержится в связном (линейно связном) открытом множестве.

Задача 8.6. Пусть дано топологическое пространство M . Докажите, что M локально связно (локально линейно связно) тогда и только тогда, когда M представляется в виде несвязного объединения своих компонент связности (линейной связности).

Задача 8.7. Докажите, что связное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда оно локально линейно связно.

Задача 8.8. Пусть дано открытое подмножество в \mathbb{R}^n . Докажите, что оно локально линейно связно.

Задача 8.9 ().** Пусть ω – первый континуальный ординал, а $\phi : [0, 1] \rightarrow \omega$ – соответствующая биекция. Пусть $X \subset [0, 1] \times [0, 1]$ – подмножество квадрата, состоящее из всех x, y таких, что $\phi(x) > \phi(y)$. Докажите, что X связно. Докажите, что линейно связные компоненты X – либо точки, либо сегменты горизонтальных отрезков.

Указание. Докажите, что пересечение X с любым вертикальным отрезком нигде не плотно. Пусть $V \subset [0, 1] \times [0, 1]$ – связное замкнутое подмножество квадрата, содержащееся в X . Докажите, что V пересекается с каждым вертикальным отрезком не более чем в одной точке. Значит, V это график непрерывного отображения $\gamma : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, такого, что $\phi(\gamma(a)) < \phi(a)$. Докажите, что такое отображение постоянно.

Геодезическая связность

Определение 8.5. Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство. Напомним, что **геодезической** в M называется отображение $[a, b] \rightarrow M$, которое сохраняет метрику. Говорят, что M **геодезически связно**, если любые две точки можно соединить геодезической. Естественно, геодезически связное пространство линейно связно.

Определение 8.6. Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство. Говорят, что M **липшицево связно**, с константой Липшица $C \geq 1$, если для любых $x, y \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность точек $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$, что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, а $\sum_i d(x_i, x_{i+1}) \leq Cd(x, y)$. Иначе говоря, мы можем расставить n точек между x и y таким образом, что они отстоят друг от друга не больше, чем на ε , а длина ломаной, составленной из этих точек, не больше $Cd(x, y)$.

Задача 8.10 (*). Докажите, что метрическое пространство M геодезически связно $\Leftrightarrow M$ липшицево связно, с константой Липшица 1.

Указание. Это теорема Хопфа-Ринова.

Задача 8.11 (!). Пусть (M, d) – липшицево связное метрическое пространство, с константой C . Определим функцию $d_h : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum d(x_i, x_{i+1}) \right),$$

где \inf берется по всем таким последовательностям $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$, что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. Докажите, что $d(x, y) \leq d_h(x, y) \leq Cd(x, y)$ для любых $x, y \in M$. Докажите, что d_h – метрика, и что (M, d) гомеоморфно (M, d_h) .

Задача 8.12 (*). Докажите, что (M, d_h) липшицево связное, с любой константой $C > 1$.

Задача 8.13 (*). Докажите, что (M, d_h) удовлетворяет условию Хопфа-Ринова (а следовательно, геодезически связно).

Определение 8.7. Напомним, что отображение $[a, b] \xrightarrow{\phi} M$ удовлетворяет условию Липшица, с константой $C > 0$, если $d(\phi(x), \phi(y)) \leq C|x - y|$, для любых $x, y \in [a, b]$. Легко видеть, что липшицево отображение непрерывно.

Задача 8.14 (*). Пусть M – локально компактное полное метрическое пространство. Докажите, что M липшицево связно с константой C , тогда и только тогда, когда любые две точки можно соединить путем, который удовлетворяет условию Липшица с той же самой константой.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и неравенством $d(x, y) \leq d_h(x, y) \leq Cd(x, y)$.

Замечание. Мы получили, что липшицево связное метрическое пространство линейно связно.

Задача 8.15. Рассмотрим окружность S на плоскости, с индуцированной метрикой. Докажите, что S липшицево связно, с константой $\frac{\pi}{2}$.

Задача 8.16 (*). Докажите, что $\frac{\pi}{2}$ – наименьшая из констант, для которых окружность с такой метрикой липшицево связна.

Задача 8.17 ().** Рассмотрим отображение $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное в полярных координатах функцией $\theta = 1/x$, $r = x$ (это спираль, которая наматывается вокруг нуля, с шагом $\frac{1}{2\pi n}$). Пусть X – замыкание графика этого отображения (оно, очевидно, состоит из этого графика и нуля). Докажите, что X линейно связно. Докажите, что X не липшицево связно, какую бы константу C мы не взяли.

Задача 8.18 (*). Пусть M – локально компактное полное метрическое пространство. Обозначим через $S_\varepsilon(x)$ сферу радиуса ε с центром в x . Докажите, что следующие условия равносильны.

- (i) M липшицево связно, с константой C
- (ii) для любых $x, y \in M$ и любых $r_1, r_2 > 0$, для которых $r_1 + r_2 \leq 1$, расстояние между сферами $S_{dr_1}(x)$, $S_{dr_2}(y)$ не больше $Cd(1 - r_1 - r_2)$, где $d = d(x, y)$.

Указание. Чтобы вывести из липшицевой связности (ii), проведите через x, y кривую Липшица. Из (ii) липшицева связность следует непосредственно. Расстояние от точки x до сферы $S_{d(1-C^{-1}\varepsilon)}(y)$ не больше ε ; возьмем в качестве x_2 точку сферы, реализующую это расстояние (что возможно, поскольку сфера, по теореме Хопфа-Ринова, компактна) и применим индукцию.

Замечание. Напомним, что условие Хопфа-Ринова (в одной из версий) состоит в том, что расстояние между сферами $S_{dr_1}(x)$, $S_{dr_2}(y)$ равно $d(1 - r_1 - r_2)$.

Пространство петель

Определение 8.8. Пусть (M, x) – топологическое пространство с отмеченной точкой. Рассмотрим множество $\Omega(M, x)$ путей $[0, 1] \xrightarrow{\phi} M$, $\phi(0) = \phi(1) = x$, с открыто-компактной топологией (предбаза этой топологии – множества $U(K, W)$ отображений, переводящих заданный компакт $K \subset [0, 1]$ в заданное открытое множество $W \subset M$). Тогда $\Omega(M, x)$ называется **пространством петель** для (M, x) .

Задача 8.19 (!). Пусть M метризуемо. Докажите, что $\Omega(M, x)$ тоже метризуемо, и метрика задается по формуле

$$d(\gamma, \gamma') = \sup_{x \in [0, 1]} d(\gamma(x), \gamma'(x)).$$

Задача 8.20. Пусть (M, x) – пространство с отмеченной точкой, M_0 – компонента связности отмеченной точки x , а M_1 – компонента линейной связности x . Докажите, что $\Omega(M, x) = \Omega(M_0, x) = \Omega(M_1, x)$.

Задача 8.21. Пусть X, Y – компакты, а \mathcal{W} – пространство отображений из X в M , снабженное открыто-компактной топологией. Постройте биекцию между непрерывными отображениями из Y в \mathcal{W} и непрерывными отображениями $X \times Y \rightarrow M$.

Задача 8.22 (!). Пусть $\gamma, \gamma' \in \Omega(M, x)$ – точки в пространстве петель. Постройте биекцию между следующими множествами:

- (i) Пути $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega(M, x)$, соединяющие γ и γ' .
- (ii) Непрерывные отображения Ψ из квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ в M , переводящие $\{1\} \times [0, 1]$ в x , и такие, что $\Psi|_{[0, 1] \times \{0\}} = \gamma$, $\Psi|_{[0, 1] \times \{1\}} = \gamma'$.

Определение 8.9. Пути $\gamma, \gamma' \in \Omega(M, x)$, для которых такое отображение $\Psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ существуют, называются **гомотопными**, а Ψ – связывающей их **гомотопией**.

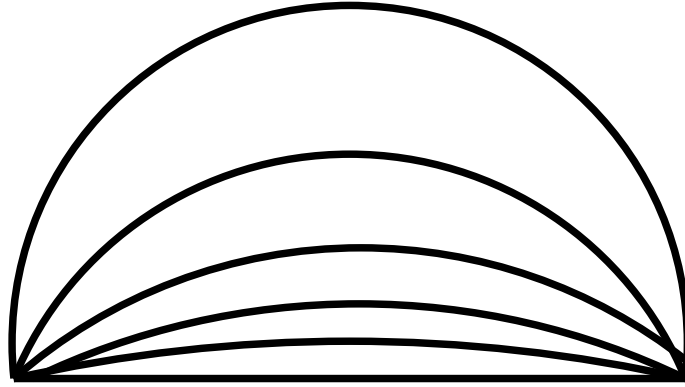
Задача 8.23. Докажите, что множество всех петель, гомотопных $\gamma \in \Omega(M, x)$ – это компонента линейной связности $\gamma \in \Omega(M, x)$.

Задача 8.24. Докажите, что гомотопия петель является отношением эквивалентности.

Замечание. Гомотопные петли также называют **гомотопически эквивалентными**.

Определение 8.10. Пусть (M, x) линейно связно. Множество классов гомотопической эквивалентности петель обозначается через $\pi_1(M, x)$.

Задача 8.25 (*). Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ – объединение отрезка $[(0, 1), (0, -1)]$ и сегментов окружностей диаметра 3, 4, 5, ..., соединяющих $(0, 1)$ и $(0, -1)$.



Докажите, что M линейно связно. Докажите, что для любого $x \in M$ $\Omega(M, x)$ не локально линейно связно.

Задача 8.26 (*). Пусть (M, d) – такое геодезически связное локально компактное метрическое пространство, что для некоторого $\delta > 0$ и любых точек $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$, геодезическая, соединяющая x и y , единственна. Пусть $\Delta_\delta \subset M \times M$ – множество пар $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$. Рассмотрим отображение $\Delta_\delta \rightarrow M$, ставящее паре точек середину соединяющей их геодезической. Докажите, что оно непрерывно.

Указание. Пусть $\{(x_i, y_i)\}$ – последовательность таких пар, сходящихся к (x, y) , а $\{z_i\}$ – последовательность середин геодезических. В силу локальной компактности, у $\{z_i\}$ есть предельные точки и нет бесконечных дискретных подмножеств. Любая предельная точка $\{z_i\}$ будет серединой геодезической, соединяющей x и y . Следовательно, у $\{z_i\}$ есть единственная предельная точка.

Задача 8.27 (*). Рассмотрим отображение $\Delta_\delta \otimes [0, 1] \xrightarrow{\Psi} M$, ставящее паре точек $x, y \in M$, $d(x, y) = d$, и $t \in [0, 1]$ в соответствие точку $\gamma_{x,y}(\frac{t}{d})$, где $\gamma_{x,y}$ – геодезическая, соединяющая x и y (если эти точки совпадают, положим $\Psi(x, y, t) = x$). Докажите, что это отображение непрерывно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и конструкцией геодезической как предела середин отрезков, которая приводилась в доказательстве теоремы Хопфа-Ринова.

Определение 8.11. Пусть M – метрическое пространство. Путь $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ называется **кусочно-геодезическим**, если отрезок $[0, 1]$ разбит на подотрезки $[0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, 1]$, и на каждом из этих отрезков γ удовлетворяет $d(\gamma(x), \gamma(y)) = \lambda_i |x - y|$, для какой-то константы λ_i .

Иначе говоря, кусочно геодезический путь представляет собой ломаную, каждый отрезок которой – геодезическая (с точностью до линейной замены переменных).

Замечание. Если M – открытое подмножество в \mathbb{R}^n , с естественной метрикой, то геодезические, как было доказано в листке 4, это отрезки прямой. Таким образом, кусочно геодезические пути – это ломаные. Такие отображения также называются **кусочно-линейными**.

Задача 8.28 (*). В условиях задачи 8.26, рассмотрим $\Omega(M, x)$ как метрическое пространство (с sup-метрикой). Докажите, что любая петля $\gamma \in \Omega(M, x)$ гомотопна кусочно геодезической, причем гомотопию можно выбрать в любой ε -окрестности $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Omega(M, x)$.

Задача 8.29 (*). Выведите из этого, что $\Omega(M, x)$ локально линейно связно.

Замечание. В такой ситуации, $\pi_1(M, x)$ – множество связных компонент $\Omega(M, x)$.

Задача 8.30. Пусть M – открытое подмножество в \mathbb{R}^n . Докажите, что $\Omega(M, x)$ локально линейно связно.

Указание. Докажите, что любую петлю можно прогомоторировать (в произвольно малой ε -окрестности) в кусочно линейную.

Фундаментальная группа

Задача 8.31. Пусть даны петли $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(M, x)$. Рассмотрим петлю $\gamma_1\gamma_2 \in \Omega(M, x)$, которая задается следующим образом:

$$\gamma_1\gamma_2(\lambda) = \begin{cases} \gamma_1(2\lambda) & \lambda \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2\lambda - 1) & \lambda \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Докажите, что класс гомотопии $\gamma_1\gamma_2$ зависит только от классов гомотопии γ_1, γ_2 : если $\gamma_1 \sim \gamma'_1, \gamma_2 \sim \gamma'_2$, то $\gamma_1\gamma_2 \sim \gamma'_1\gamma'_2$.

Задача 8.32. Докажите, что $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ гомотопна $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$.

Задача 8.33. Пусть дана петля $\gamma \in \Omega(M, x)$. Обозначим через γ^{-1} петлю $\gamma^{-1}(x) = \gamma(1 - x)$. Докажите, что петли $\gamma\gamma^{-1}$ и $\gamma^{-1}\gamma$ гомотопны тривиальной петле $[0, 1] \rightarrow x$.

Замечание. Петли, которые гомотопны тривиальной петле, называются **гомотопными нулю**.

Задача 8.34 (!). Докажите, что операция $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ задает на $\pi_1(M, x)$ структуру группы.

Определение 8.12. Эта группа называется **фундаментальной группой M** .

Задача 8.35. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – непрерывное отображение линейно связных пространств, а $x \in X$ – произвольная точка. Рассмотрим соответствующее отображение

$$\Omega(X, x) \xrightarrow{\tilde{f}} \Omega(Y, f(x)), \quad \gamma \mapsto \gamma \circ f.$$

Докажите, что \tilde{f} переводит гомотопные пути в гомотопные, и индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп.

Задача 8.36. Пусть M – линейно связное топологическое пространство, а $x, y \in M$ – две точки. Рассмотрим пространство $\Omega(M, x, y)$ путей $[0, 1] \rightarrow M$, соединяющих x и y , с открыто-компактной топологией. Как и выше, пути называются гомотопными (гомотопически эквивалентными) если они лежат в одной компоненте линейной связности $\Omega(M, x, y)$. Определим операцию $\Omega(M, x, y) \times \Omega(M, y, z) \rightarrow \Omega(M, x, z)$, $\gamma_1, \gamma_2 \mapsto \gamma_1\gamma_2$ той же формулой, которая приводится в задаче 8.31. Докажите, что это отображение непрерывно, и переводит гомотопные пути в гомотопные.

Задача 8.37 (!). Пусть $x, y \in M$, а $\gamma_{xy}[0, 1] \rightarrow M$ – путь, соединяющий x и y . Определим γ_{xy}^{-1} формулой $\gamma_{xy}^{-1}(\lambda) = \gamma_{xy}(1 - \lambda)$. Рассмотрим отображение $\Omega(M, x) \rightarrow \Omega(M, y)$, $\gamma \mapsto \gamma_{xy}^{-1}\gamma\gamma_{xy}$ и $\Omega(M, y) \rightarrow \Omega(M, x)$, $\gamma \mapsto \gamma_{xy}\gamma\gamma_{xy}^{-1}$. Докажите, что эти отображения переводят гомотопные пути в гомотопные. Пусть f, g – соответствующие отображения на фундаментальных группах. Докажите, что f и g взаимно обратны, и индуцируют изоморфизм групп $\pi_1(M, x) \xrightarrow{\phi_{\gamma_{xy}}} \pi_1(M, y)$.

Замечание. Как видно из следующей задачи, если $\pi_1(M)$ не абелева, то полученный изоморфизм $\pi_1(M, x) \cong \pi_1(M, y)$ нетривиально зависит от выбора пути γ_{xy} . Тем не менее, когда зависимость от отмеченной точки не важна, фундаментальную группу M обозначают просто $\pi_1(M)$. Это обозначение не вполне корректно.

Задача 8.38 (!). В условиях предыдущей задачи, пусть $x = y$, а γ_{xx} – некоторый путь. Докажите, что полученный выше изоморфизм $\pi_1(M, x) \xrightarrow{\phi_{\gamma_{xx}}} \pi_1(M, x)$ выражается через γ_{xx} так: $\gamma \mapsto \gamma_{xx}\gamma\gamma_{xx}^{-1}$.

Односвязные пространства

Определение 8.13. Пусть M – линейно связное топологическое пространство. Говорят, что M **односвязно**, если все петли на M стягиваемы, т.е. если $\pi_1(M) = \{1\}$.

Задача 8.39. Докажите, что \mathbb{R}^n односвязно.

Определение 8.14. Пусть (M, x) – топологическое пространство с отмеченной точкой, а $M \times [0, 1] \xrightarrow{\phi} M$ – такое непрерывное отображение, что $\phi(M \times \{1\}) = \{x\}$, а $\phi|_{M \times \{0\}}$ задает тождественное отображение из $M = M \times \{0\}$ в M . Тогда (M, x) называется **стягиваемым**. В такой ситуации, говорится, что ϕ **задает гомотопию между тождественным отображением и проекцией** $M \rightarrow \{x\}$.

Задача 8.40 (!). Пусть (M, x) линейно связно и стягиваемо. Докажите, что для любой точки $y \in M$ пространство (M, y) стягиваемо.

Указание. Пусть $M \times [0, 1] \xrightarrow{\phi} M$ – гомотопия между тождественным отображением и проекцией в $\{x\}$, а $[1, 0] \xrightarrow{\gamma} M$ – путь, соединяющий x и y . Возьмите $M \times [0, 1] \xrightarrow{\phi_1} M$, отображающий (m, t) в $\phi(m, 2t)$ для $t \in [0, 1/2]$ и (m, t) в $\gamma(2t - 1)$ для $t \in [1/2, 1]$.

Задача 8.41. Докажите, что стягиваемое топологическое пространство линейно связно.

Замечание. Из двух вышеприведенных задач ясно, что стягиваемость (M, x) не зависит от выбора x . В дальнейшем мы будем говорить просто “ M стягиваемо”.

Задача 8.42. Докажите, что стягиваемое пространство односвязно.

Задача 8.43 (!). Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ – **звездчатое подмножество** (\mathbb{R}^n, x) , то есть такое подмножество, что любая прямая, проходящая через $x \in \mathbb{R}^n$, пересекается с V по связному множеству, а $x \in V$. Докажите, что V стягиваемо.

Задача 8.44. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое подмножество. Докажите, что оно стягиваемо.

Определение 8.15. Пусть $N \subset M$ – топологическое пространство и его подмножество. **Деформационной ретракцией** (или просто **ретракцией**) M к N называется такое непрерывное отображение $M \times [0, 1] \xrightarrow{\phi} M$, что $\phi(M \times \{1\}) \subset N$, причем ограничение этого отображения на N тождественное, а $\phi|_{M \times \{0\}}$ задает тождественное отображение. В этом случае N называется **ретрактом** M .

Задача 8.45 (!). Пусть $N \subset M$ – ретракт, $n \in N$ – точка в N . Докажите, что естественное отображение $\pi_1(N, n) \rightarrow \pi_1(M, n)$ – изоморфизм.

Определение 8.16. Пусть M – топологическое пространство, а \sim – соотношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается, как всегда, через M/\sim . На M/\sim вводится **топология фактора**: открытые подмножества M/\sim – это такие подмножества, прообраз которых в M открыт. В частности, если на M действует группа G , то возникает естественное отношение эквивалентности: $x \sim y$ если существует такое $g \in G$, что $g \cdot x = y$. Фактор M по этому отношению эквивалентности называется **факторпространством M по действию G** , и обозначается M/G . Классы эквивалентности называются **G -орбитами** в M .

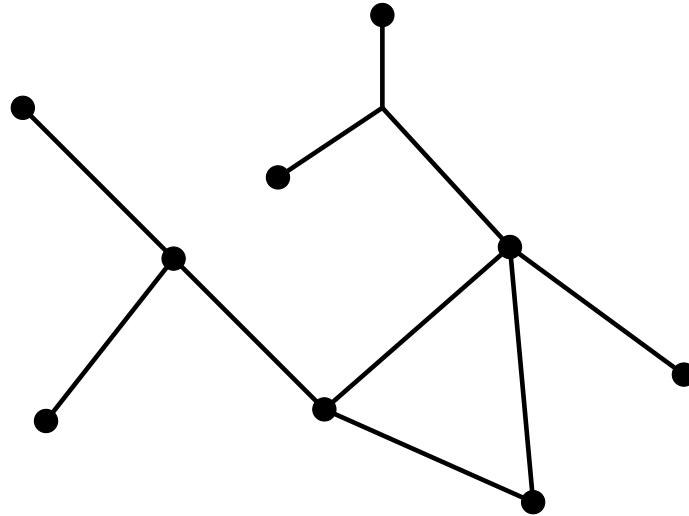
Задача 8.46. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а $\{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ и $\{y_1, \dots, y_m\} \subset M$ – два непересекающихся конечных подмножества. Докажите, что у подмножеств $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_m\}$ найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 8.47 (!). Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а G – конечная группа, которая действует на M гомеоморфизмами. Рассмотрим факторпространство M/G с топологией фактора. Докажите, что M/G хаусдорфово.

Указание. Пусть x, y – две точки, не принадлежащие одной и той же G -орбите. Найдите у x, y непересекающиеся G -инвариантные окрестности. Для этого примените 8.46 к орбитам Gx, Gy , получите окрестности U, U' , и возьмите $\bigcap_{g \in G} gU, \bigcap_{g \in G} gU'$.

Задача 8.48 (*). Приведите пример, когда M хаусдорфово, а M/G нехаусдорфово (и группа, соответственно, не конечна).

Определение 8.17. Пусть Γ – некоторый граф, то есть набор данных вида “множество вершин” $\{\mathcal{V}\}$, “множество ребер” $\{\mathcal{R}\}$, и сведений о том, какие вершины являются концами каких ребер.



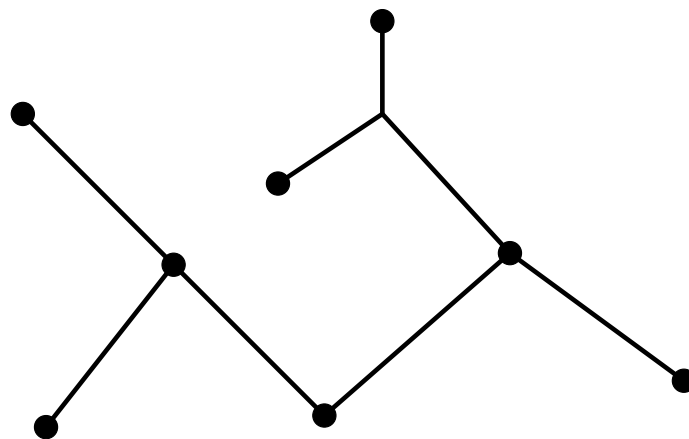
Более строго, Γ можно определить как пару множеств \mathcal{V} , \mathcal{R} и сюръективное отображение $\{\mathcal{R}\} \times \{l, \infty\} \twoheadrightarrow \{\mathcal{V}\}$. Введем на $\{\mathcal{R}\} \times [l, \infty]$, отношение эквивалентности, порожденное следующим: концы двух ребер эквивалентны, если они примыкают к одной и той же вершине. Это отношение эквивалентности склеивает концы ребер, прилегающих к одной и той же вершине. Фактор $\{\mathcal{R}\} \times [l, \infty]$ по этому отношению эквивалентности называется **топологическим пространством графа**.

Задача 8.49. Докажите, что топологическое пространство любого графа хаусдорфово.

Задача 8.50. Граф называется **связным**, если любая вершина соединена с любой другой конечной цепочкой ребер. Докажите, что топологическое пространство связного графа линейно связно.

Задача 8.51 ().** Пусть дан граф с бесконечным множеством вершин. Докажите, что в графе найдется бесконечное подмножество вершин, попарно соединенных ребрами, либо бесконечное подмножество вершин, попарно несоединенных.

Задача 8.52 (!). Пусть Γ – связный граф, у которого n вершин и $n - 1$ ребро (такой граф называется **деревом**).



Докажите, что его топологическое пространство M_Γ стягиваемо.

Задача 8.53 (*). Пусть Γ – такой бесконечный связный граф, что любой связный конечный подграф Γ – дерево. Докажите, что $\pi_1(M_\Gamma) = \{1\}$.

Задача 8.54 (*). Пусть S^n – n -мерная сфера ($n > 1$). Докажите, что S^n односвязна.

Указание. Воспользуйтесь учением о геодезической связности.

Накрытия

Определение 8.18. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – непрерывное отображение топологических пространств. Отображение π называется **накрытием**, если у каждой точки есть такая окрестность U , что $\pi^{-1}(U)$ изоморфно произведению U и дискретного топологического пространства K , причем стандартное отображение $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$ совпадает с естественной проекцией $\pi^{-1}(U) = U \times K \rightarrow U$. В этом случае также говорится, что \tilde{M} **накрывает** M .

Мы рассматриваем окружность S^1 как фактор $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Это задает естественную групповую структуру на S^1 .

Задача 8.55. Пусть n – ненулевое целое число. Рассмотрим естественное отображение $S^1 \rightarrow S^1$, $t \rightarrow nt$. Докажите, что это накрытие.

Задача 8.56. Докажите, что естественная проекция $\mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – накрытие.

Задача 8.57. Докажите, что естественная проекция $\mathbb{R}^n \rightarrow (S^1)^n$ это накрытие

Задача 8.58. Рассмотрим фактор $S^n \rightarrow S^n/\{\pm 1\} = \mathbb{R}P^n$ сферы по центральной симметрии, с естественной топологией (открытые множества – это такие, прообраз которых открыт). Докажите, что это накрытие.

Задача 8.59. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $\tilde{M}' \subset \tilde{M}$ – подпространство, которое тоже накрывает M . Докажите, что \tilde{M}' открыто и замкнуто в \tilde{M} .

Задача 8.60. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а M локально линейно связно. Докажите, что \tilde{M} локально линейно связно. Докажите, что любая компонента линейной связности в \tilde{M} накрывает M .

Задача 8.61 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а M локально линейно связно. Докажите, что \tilde{M} связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

Определение 8.19. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ – некоторый путь, а $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие M . Отображение $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \tilde{M}$ называется **поднятием** γ , если $\tilde{\gamma} \circ \pi = \gamma$.

Задача 8.62 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ – путь, соединяющий x и y . Докажите, что для каждого $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$, существует и единственно поднятие $\tilde{\gamma}$, переводящее a в \tilde{x} .

Задача 8.63 (!). Докажите, что гомотопные пути поднимаются до гомотопных путей, а $\tilde{\gamma}(y) \in \pi^{-1}(\{y\})$ однозначно определяется классом гомотопии γ в $\Omega(M, x, y)$ и точкой \tilde{x} .

Замечание. Обозначим через $\pi_1(M, x, y)$ множество классов гомотопии путей из x в y . Мы получили отображение

$$\pi^{-1}(\{x\}) \times \pi_1(M, x, y) \xrightarrow{\Psi} \pi^{-1}(\{y\})$$

Определение 8.20. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а M линейно связно. Пространство \tilde{M} называется **универсальным накрытием**, если оно связно и односвязно.

Замечание. Односвязность была определена только для линейно связных пространств. Но это ничему не мешает, поскольку из задачи 8.61 следует, что \tilde{M} линейно связно.

Задача 8.64 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – универсальное накрытие. Зафиксируем $x \in M$ и $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$. Рассмотрим отображение $\pi_1(M, x) \xrightarrow{\psi} \pi^{-1}(\{x\})$, построенное в 8.63, $\psi(\gamma) = \Psi(\tilde{x}, \gamma)$. Докажите, что это биекция.

Задача 8.65. Докажите, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Задача 8.66. Докажите, что $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$.

Задача 8.67 (*). Докажите, что при $(n > 1)$ имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 8.68. Найдите фундаментальные группы всех букв русского алфавита, кроме “ф” и “в” (точнее, графов, смоделированных на этих буквах).

Задача 8.69 (*). Дан конечный связный граф, у которого n ребер и n вершин. Пусть M – его топологическое пространство. Докажите, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$.