Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ТОПОЛОГИЯ 8: Фундаментальная группа и пространство петель

Линейная связность

Определение 8.1. Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что **путем** в M называется непрерывное отображение $[a,b] \xrightarrow{\phi} M$. В этом случае говорится, что путь ϕ **соединяет точки** $\phi(a)$ **и** $\phi(b)$. M называется **линейно связным**, если любые две точки M можно соединить путем $[a,b] \xrightarrow{\phi} M$.

Задача 8.1. Пусть a, b, c лежат в M, причем a можно соединить путем с b, а b с c. Докажите, что a можно соединить путем с c.

Задача 8.2. Выведите из этого, что объединение линейно связных подмножеств M, содержащих выбранную точку $x \in M$, линейно связно.

Определение 8.2. Объединение всех линейно связных подмножеств, содержащих какую-то фиксированную точку x, называется **компонентой линейной связности** M.

Задача 8.3. Рассмотрим следующее подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$: график функции $\sin(1/t)$, объединенный с отрезком $[(0,1),(0,-1)]$. Докажите, что X локально компактно, связно, и не линейно связно. Найдите компоненты линейной связности.

Задача 8.4 (*). Найдите компактное и связное метризуемое топологическое пространство, имеющее бесконечное количество компонент линейной связности.

Определение 8.3. Пусть $\{M_\alpha\}$ – набор топологических пространств, индексированный множеством $\mathfrak{A}$. Несвязное объединение $\coprod_{\alpha\in\mathfrak{A}} M_\alpha$ – это топологическое пространство, точками которого являются пары $(\alpha, m) \ \mid \ \alpha \in \mathfrak{A}, m \in M_\alpha$, а база топологии задается открытыми множествами во всех M_α.

Задача 8.5. Докажите, что несвязное объединение одноточечных пространств дискретно. Докажите, что естественная проекция $\coprod_{\alpha\in\mathfrak{A}} M_\alpha \longrightarrow \mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ с дискретной топологией непрерывна.

Определение 8.4. Топологическое пространство M называется локально связным (локально линейно связным), если каждая точка $x \in M$ содержится в связном (линейно связном) открытом множестве.

Задача 8.6. Пусть дано топологическое пространство M. Докажите, что M локально связно (локально линейно связно) тогда и только тогда, когда M представляется в виде несвязного объединения своих компонент связности (линейной связности).

Задача 8.7. Докажите, что связное пространство линейно связно тогда и только тогда, когда оно локально линейно связно.

Задача 8.8. Пусть дано открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что оно локально линейно связно.

Задача 8.9 (**). Пусть ω – первый континуальный ординал, а $\phi:\ [0,1] \longrightarrow \omega$ – соответствующая биекция. Пусть $X \subset [0,1]\times[0,1]$ – подмножество квадрата, состоящее из всех x, y таких, что $\phi(x) > \phi(y)$. Докажите, что X связно. Докажите, что линейно связные компоненты X – либо точки, либо сегменты горизонтальных отрезков.

Указание. Докажите, что пересечение X с любым вертикальным отрезком нигде не плотно. Пусть $V \subset [0,1]\times[0,1]$ – связное замкнутое подмножество квадрата, содержащееся в X. Докажите, что V пересекается с каждым вертикальным отрезком не более чем в одной точке. Значит, V это график непрерывного отображения $\gamma:\ [a,b] \longrightarrow [0,1]$, такого, что $\phi(\gamma(a)) < \phi(a)$. Докажите, что такое отображение постоянно.

Геодезическая связность

Определение 8.5. Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство. Напомним, что **геодезической** в M называется отображение $[a,b] \longrightarrow M$, которое сохраняет метрику. Говорят, что M **геодезически связно**, если любые две точки можно соединить геодезической. Естественно, геодезически связное пространство линейно связно.

Определение 8.6. Пусть M – полное локально компактное метрическое пространство. Говорят, что M **липшицево связно**, с константой Липшица $C \geqslant 1$, если для любых $x, y \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность точек $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$, что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, а $\sum_i d(x_i, x_{i+1}) \leqslant Cd(x,y)$. Иначе говоря, мы можем расставить n точек между x и y таким образом, что они отстоят друг от друга не больше, чем на ε, а длина ломаной, составленной из этих точек, не больше $Cd(x,y)$.

Задача 8.10 (*). Докажите, что метрическое пространство M геодезически связно $\Leftrightarrow$ M липшицево связно, с константой Липшица 1.

Указание. Это теорема Хопфа-Ринова.

Задача 8.11 (!). Пусть (M,d) – липшицево связное метрическое пространство, с константой C. Определим функцию $d_h:\ M\times M \longrightarrow \mathbb{R}$ как

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \left(\sum d(x_i, x_{i+1})\right),$$

где inf берется по всем таким последовательностям $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$, что $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. Докажите, что $d(x,y) \leqslant d_h(x,y) \leqslant Cd(x,y)$ для любых $x, y \in M$. Докажите, что d_h – метрика, и что (M,d) гомеоморфно (M,d_h).

Задача 8.12 (*). Докажите, что (M,d_h) липшицево связное, с любой константой $C > 1$.

Задача 8.13 (*). Докажите, что (M, d_h) удовлетворяет условию Хопфа-Ринова (а следовательно, геодезически связно).

Определение 8.7. Напомним, что отображение $[a,b] \xrightarrow{\phi} M$ **удовлетворяет условию Липшица, с константой** $C > 0$, если $d(\phi(x), \phi(y)) \leqslant C|x-y|$, для любых $x, y \in [a,b]$. Легко видеть, что липшицево отображение непрерывно.

Задача 8.14 (*). Пусть M – локально компактное полное метрическое пространство. Докажите, что M липшицево связное с константой C, тогда и только тогда, когда любые две точки можно соединить путем, который удовлетворяет условию Липшица с той же самой константой.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и неравенством $d(x,y) \leqslant d_h(x,y) \leqslant Cd(x,y)$.

Замечание. Мы получили, что липшицево связное метрическое пространство линейно связно.

Задача 8.15. Рассмотрим окружность S на плоскости, с индуцированной метрикой. Докажите, что S липшицево связно, с константой $\frac{\pi}{2}$.

Задача 8.16 (*). Докажите, что $\frac{\pi}{2}$ – наименьшая из констант, для которых окружность с такой метрикой липшицево связна.

Задача 8.17 (**). Рассмотрим отображение $]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданное в полярных координатах функцией $\theta = 1/x$, $r = x$ (это спираль, которая наматывается вокруг нуля, с шагом $\frac{1}{2\pi n}$). Пусть X – замыкание графика этого отображения (оно, очевидно, состоит из этого графика и нуля). Докажите, что X линейно связно. Докажите, что X не липшицево связно, какую бы константу C мы не взяли.

Задача 8.18 (*). Пусть M – локально компактное полное метрическое пространство. Обозначим через $S_\varepsilon(x)$ сферу радиуса ε с центром в x. Докажите, что следующие условия равносильны.

(i) M липшицево связное, с константой C

(ii) для любых $x, y \in M$ и любых $r_1, r_2 > 0$, для которых $r_1 + r_2 \leqslant 1$, расстояние между сферами $S_{dr_1}(x)$, $S_{dr_2}(y)$ не больше $Cd(1 - r_1 - r_2)$, где $d = d(x,y)$.

Указание. Чтобы вывести из липшицевой связности (ii), проведите через x, y кривую Липшица. Из (ii) липшицева связность следует непосредственно. Расстояние от точки x до сферы $S_{d(1-C^{-1}\varepsilon)}(y)$ не больше ε; возьмем в качестве x_2 точку сферы, реализующую это расстояние (что возможно, поскольку сфера, по теореме Хопфа-Ринова, компактна) и применим индукцию.

Замечание. Напомним, что условие Хопфа-Ринова (в одной из версий) состоит в том, что расстояние между сферами $S_{dr_1}(x)$, $S_{dr_2}(y)$ равно $d(1 - r_1 - r_2)$.

Пространство петель

Определение 8.8. Пусть (M,x) – топологическое пространство с отмеченной точкой. Рассмотрим множество $\Omega(M,x)$ путей $[0,1] \xrightarrow{\phi} M$, $\phi(0)=\phi(1)=x$, с открыто-компактной топологией (предбаза этой топологии - множества $U(K,W)$ отображений, переводящих заданный компакт $K\subset[0,1]$ в заданное открытое множество $W\subset M$). Тогда $\Omega(M,x)$ называется **пространством петель** для (M,x).

Задача 8.19 (!). Пусть M метризуемо. Докажите, что $\Omega(M,x)$ тоже метризуемо, и метрика задается по формуле
$$d(\gamma,\gamma')=\sup_{x\in[0,1]} d(\gamma(x),\gamma'(x)).$$

Задача 8.20. Пусть (M,x) – пространство с отмеченной точкой, M_0 – компонента связности отмеченной точки x, а M_1 – компонента линейной связности x. Докажите, что $\Omega(M,x)=\Omega(M_0,x)=\Omega(M_1,x)$.

Задача 8.21. Пусть X,Y – компакты, а $\mathcal{W}$ - пространство отображений из X в M, снабженное открыто-компактной топологией. Постройте биекцию между непрерывными отображениями из Y в $\mathcal{W}$ и непрерывными отображениями $X\times Y\longrightarrow M$.

Задача 8.22 (!). Пусть $\gamma,\gamma'\in\Omega(M,x)$ – точки в пространстве петель. Постройте биекцию между следующими множествами:

(i) Пути $\Gamma:\ [0,1]\longrightarrow\Omega(M,x)$, соединяющие γ и γ'.

(ii) Непрерывные отображения Ψ из квадрата $[0,1]\times[0,1]$ в M, переводящие $\{1\}\times[0,1]$ в x, и такие, что $\Psi\Big|_{[0,1]\times\{0\}}=\gamma$, $\Psi\Big|_{[0,1]\times\{1\}}=\gamma'$.

Определение 8.9. Пути $\gamma,\gamma'\in\Omega(M,x)$, для которых такое отображение $\Psi:\ [0,1]\times[0,1]\longrightarrow M$ существуют, называются **гомотопными**, а Ψ – связывающей их **гомотопией**.

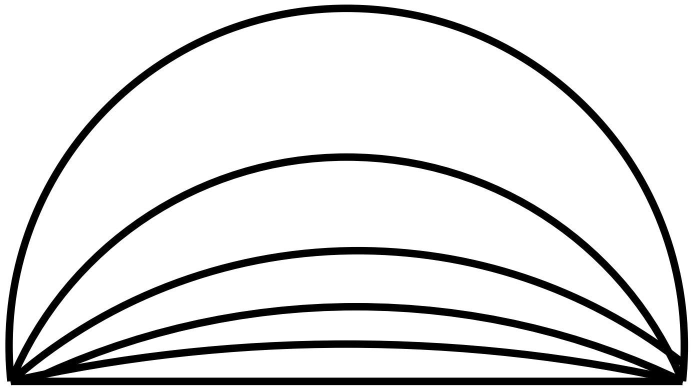
Задача 8.23. Докажите, что множество всех петель, гомотопных $\gamma\in\Omega(M,x)$ – это компонента линейной связности $\gamma\in\Omega(M,x)$.

Задача 8.24. Докажите, что гомотопия петель является отношением эквивалентности.

Замечание. Гомотопные петли также называют **гомотопически эквивалентными**.

Определение 8.10. Пусть (M,x) линейно связно. Множество классов гомотопической эквивалентности петель обозначается через $\pi_1(M,x)$.

Задача 8.25 (*). Пусть $M\subset\mathbb{R}^2$ – объединение отрезка $[(0,1),(0,-1)]$ и сегментов окружностей диаметра $3,4,5,\dots$, соединяющих $(0,1)$ и $(0,-1)$.



Докажите, что M линейно связно. Докажите, что для любого $x \in M$ $\Omega(M,x)$ не локально линейно связно.

Задача 8.26 (*). Пусть (M,d) – такое геодезически связное локально компактное метрическое пространство, что для некоторого $\delta > 0$ и любых точек $x, y \in M$, $d(x,y) < \delta$, геодезическая, соединяющая x и y, единственна. Пусть $\Delta_\delta \subset M \times M$ – множество пар $x, y \in M$, $d(x,y) < \delta$. Рассмотрим отображение $\Delta_\delta \longrightarrow M$, ставящее паре точек середину соединяющей их геодезической. Докажите, что оно непрерывно.

Указание. Пусть $\{(x_i, y_i)\}$ – последовательность таких пар, сходящихся к (x,y), а $\{z_i\}$ – последовательность середин геодезических. В силу локальной компактности, у $\{z_i\}$ есть предельные точки и нет бесконечных дискретных подмножеств. Любая предельная точка $\{z_i\}$ будет серединой геодезической, соединяющей x и y. Следовательно, у $\{z_i\}$ есть единственная предельная точка.

Задача 8.27 (*). Рассмотрим отображение $\Delta_\delta \otimes [0,1] \xrightarrow{\Psi} M$, ставящее паре точек $x, y \in M$, $d(x,y) = d$, и $t \in [0,1]$ в соответствие точку $\gamma_{x,y}\left(\frac{t}{d}\right)$, где $\gamma_{x,y}$ – геодезическая, соединяющая x и y (если эти точки совпадают, положим $\Psi(x,y,t) = x$). Докажите, что это отображение непрерывно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и конструкцией геодезической как предела середин отрезков, которая приводилась в доказательстве теоремы Хопфа-Ринова.

Определение 8.11. Пусть M – метрическое пространство. Путь $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$ называется **кусочно-геодезическим**, если отрезок $[0,1]$ разбит на подотрезки $[0,a_1]$, $[a_1,a_2]$, …, $[a_n,1]$, и на каждом из этих отрезков γ удовлетворяет $d(\gamma(x),\gamma(y)) = \lambda_i|x-y|$, для какой-то константы λ_i

Иначе говоря, кусочно геодезический путь представляет собой ломаную, каждый отрезок которой – геодезическая (с точностью до линейной замены переменных).

Замечание. Если M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, с естественной метрикой, то геодезические, как было доказано в листке 4, это отрезки прямой. Таким образом, кусочно геодезические пути – это ломаные. Такие отображения также называются **кусочно-линейными**.

Задача 8.28 (*). В условиях задачи 8.26, рассмотрим $\Omega(M,x)$ как метрическое пространство (с sup-метрикой). Докажите, что любая петля $\gamma \in \Omega(M,x)$ гомотопна кусочно геодезической, причем гомотопию можно выбрать в любой ε-окрестности $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Omega(M,x)$.

Задача 8.29 (*). Выведите из этого, что $\Omega(M, x)$ локально линейно связно.

Замечание. В такой ситуации, $\pi_1(M, x)$ – множество связных компонент $\Omega(M, x)$.

Задача 8.30. Пусть M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\Omega(M, x)$ локально линейно связно.

Указание. Докажите, что любую петлю можно прогомотопировать (в произвольно малой ε-окрестности) в кусочно линейную.

Фундаментальная группа

Задача 8.31. Пусть даны петли $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(M, x)$. Рассмотрим петлю $\gamma_1\gamma_2 \in \Omega(M, x)$, которая задается следующим образом:

$$\gamma_1\gamma_2(\lambda) = \begin{cases} \gamma_1(2\lambda) & \lambda \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2\lambda - 1) & \lambda \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Докажите, что класс гомотопии $\gamma_1\gamma_2$ зависит только от классов гомотопии γ_1, γ_2: если $\gamma_1 \sim \gamma_1'$, $\gamma_2 \sim \gamma_2'$, то $\gamma_1\gamma_1' \sim \gamma_2\gamma_2'$.

Задача 8.32. Докажите, что $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ гомотопно $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$.

Задача 8.33. Пусть дана петля $\gamma \in \Omega(M, x)$. Обозначим через γ^{-1} петлю $\gamma^{-1}(x) = \gamma(1 - x)$. Докажите, что петли $\gamma\gamma^{-1}$ и $\gamma^{-1}\gamma$ гомотопны тривиальной петле $[0, 1] \longrightarrow x$.

Замечание. Петли, которые гомотопны тривиальной петле, называются **гомотопными нулю**.

Задача 8.34 (!). Докажите, что операция $\gamma_1, \gamma_2 \longrightarrow \gamma_1\gamma_2$ задает на $\pi_1(M, x)$ структуру группы.

Определение 8.12. Эта группа называется **фундаментальной группой** M.

Задача 8.35. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ – непрерывное отображение линейно связных пространств, а $x \in X$ – произвольная точка. Рассмотрим соответствующее отображение

$$\Omega(X, x) \xrightarrow{\check{f}} \Omega(Y, f(y)), \qquad \gamma \mapsto \gamma \circ f.$$

Докажите, что $\check{f}$ переводит гомотопные пути в гомотопные, и индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп.

Задача 8.36. Пусть M – линейно связное топологическое пространство, а $x, y \in M$ – две точки. Рассмотрим пространство $\Omega(M, x, y)$ путей $[0, 1] \longrightarrow M$, соединяющих x и y, с открыто-компактной топологией. Как и выше, пути называются гомотопными (гомотопически эквивалентными) если они лежат в одной компоненте линейной связности $\Omega(M, x, y)$. Определим операцию $\Omega(M, x, y) \times \Omega(M, y, z) \longrightarrow \Omega(M, x, z)$, $\gamma_1, \gamma_2 \mapsto \gamma_1\gamma_2$ той же формулой, которая приводится в задаче 8.31. Докажите, что это отображение непрерывно, и переводит гомотопные пути в гомотопные.

Задача 8.37 (!). Пусть $x, y \in M$, а $\gamma_{xy}[0,1] \longrightarrow M$ – путь, соединяющий x и y. Определим γ_{xy}^{-1} формулой $\gamma_{xy}^{-1}(\lambda) = \gamma_{xy}(1-\lambda)$. Рассмотрим отображение $\Omega(M,x) \longrightarrow \Omega(M,y)$, $\gamma \mapsto \gamma_{xy}^{-1}\gamma\gamma_{xy}$ и $\Omega(M,y) \longrightarrow \Omega(M,x)$, $\gamma \mapsto \gamma_{xy}\gamma\gamma_{xy}^{-1}$. Докажите, что эти отображения переводят гомотопные пути в гомотопные. Пусть f, g – соответствующие отображения на фундаментальных группах. Докажите, что f и g взаимно обратны, и индуцируют изоморфизм групп $\pi_1(M,x) \xrightarrow{\phi_{\gamma_{xy}}} \pi_1(M,y)$.

Замечание. Как видно из следующей задачи, если $\pi_1(M)$ не абелева, то полученный изоморфизм $\pi_1(M,x) \cong \pi_1(M,y)$ нетривиально зависит от выбора пути γ_{xy}. Тем не менее, когда зависимость от отмеченной точки не важна, фундаментальную группу M обозначают просто $\pi_1(M)$. Это обозначение не вполне корректно.

Задача 8.38 (!). В условиях предыдущей задачи, пусть $x = y$, а γ_{xx} – некоторый путь. Докажите, что полученный выше изоморфизм $\pi_1(M,x) \xrightarrow{\phi_{\gamma_{xx}}} \pi_1(M,x)$ выражается через γ_{xx} так: $\gamma \longrightarrow \gamma_{xx}\gamma\gamma_{xx}^{-1}$.

Односвязные пространства

Определение 8.13. Пусть M – линейно связное топологическое пространство. Говорят, что M **односвязно**, если все петли на M стягиваемы, т.е. если $\pi_1(M) = \{1\}$.

Задача 8.39. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ односвязно.

Определение 8.14. Пусть (M,x) – топологическое пространство с отмеченной точкой, а $M \times [0,1] \xrightarrow{\phi} M$ – такое непрерывное отображение, что $\phi(M \times \{1\}) = \{x\}$, а $\phi\Big|_{M\times\{0\}}$ задает тождественное отображение из $M = M \times \{0\}$ в M. Тогда (M,x) называется **стягиваемым**. В такой ситуации, говорится, что ϕ **задает гомотопию между тождественным отображением и проекцией** $M \longrightarrow \{x\}$**.**

Задача 8.40 (!). Пусть (M,x) линейно связно и стягиваемо. Докажите, что для любой точки $y \in M$ пространство (M,y) стягиваемо.

Указание. Пусть $M \times [0,1] \xrightarrow{\phi} M$ – гомотопия между тождественным отображением и проекцией в $\{x\}$, а $[1,0] \xrightarrow{\gamma} M$ – путь, соединяющий x и y. Возьмите $M \times [0,1] \xrightarrow{\phi_1} M$, отображающий (m,t) в $\phi(m,2t)$ для $t \in [0,1/2]$ и (m,t) в $\gamma(2t-1)$ для $t \in [1/2,0]$.

Задача 8.41. Докажите, что стягиваемое топологическое пространство линейно связно.

Замечание. Из двух вышеприведенных задач ясно, что стягиваемость (M,x) не зависит от выбора x. В дальнейшем мы будем говорить просто "M стягиваемо".

Задача 8.42. Докажите, что стягиваемое пространство односвязно.

Задача 8.43 (!). Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ – **звездчатое подмножество** $(\mathbb{R}^n, x)$, то есть такое подмножество, что любая прямая, проходящая через $x \in \mathbb{R}^n$, пересекается с V по связному множеству, а $x \in V$. Докажите, что V стягиваемо.

Задача 8.44. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое подмножество. Докажите, что оно стягиваемо.

Определение 8.15. Пусть $N \subset M$ – топологическое пространство и его подмножество. **Деформационной ретракцией** (или просто **ретракцией**) M к N называется такое непрерывное отображение $M \times [0,1] \xrightarrow{\phi} M$, что $\phi(M \times \{1\}) \subset N$, причем ограничение этого отображения на N тождественное, а $\phi\Big|_{M\times\{0\}}$ задает тождественное отображение. В этом случае N называется **ретрактом** M.

Задача 8.45 (!). Пусть $N \subset M$ – ретракт, $n \in N$ – точка в N. Докажите, что естественное отображение $\pi_1(N,n) \longrightarrow \pi_1(M,n)$ – изоморфизм.

Определение 8.16. Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – соотношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается, как всегда, через $M/\sim$. На $M/\sim$ вводится **топология фактора**: открытые подмножества $M/\sim$ - это такие подмножества, прообраз которых в M открыт. В частности, если на M действует группа G, то возникает естественное отношение эквивалентности: $x \sim y$ если сушществует такое $g \in G$, что $g \cdot x = y$. Фактор M по этому отношению эквивалентности называется **факторпространством** M **по действию** G, и обозначается M/G. Классы эквивалентности называются G**-орбитами** в M.

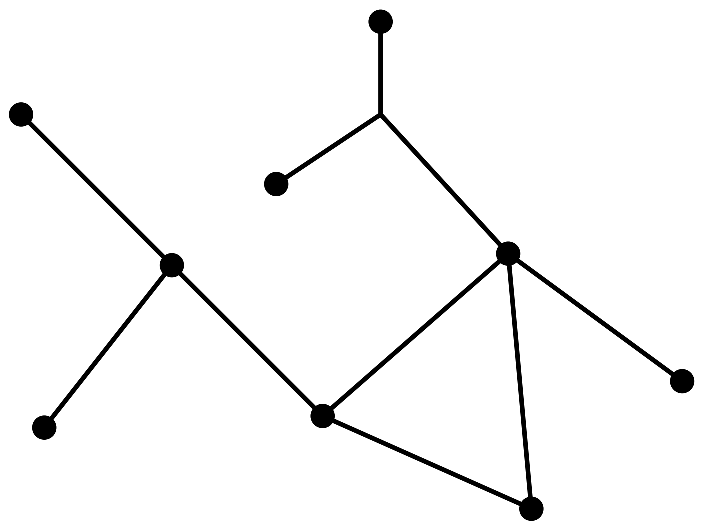
Задача 8.46. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а $\{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ и $\{y_1, \dots, y_m\} \subset M$ – два непересекающихся конечных подмножества. Докажите, что у подмножеств $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_m\}$ найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 8.47 (!). Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а G – конечная группа, которая действует на M гомеоморфизмами. Рассмотрим факторпространство M/G с топологией фактора. Докажите, что M/G хаусдорфово.

Указание. Пусть x, y – две точки, не принадлежащие одной и той же G-орбите. Найдите у x, y непересекающиеся G-инвариантные окрестности. Для этого примените 8.46 к орбитам Gx, Gy, получите окрестности U, U', и возьмите $\bigcap_{g\in G} gU$, $\bigcap_{g\in G} gU'$.

Задача 8.48 (*). Приведите пример, когда M хаусдорфово, а M/G нехаусдорфово (и группа, соответственно, не конечна).

Определение 8.17. Пусть Γ – некоторый граф, то есть набор данных вида “множество вершин” $\{\mathcal{V}\}$, “множество ребер” $\{\mathcal{R}\}$, и сведений о том, какие вершины являются концами каких ребер.



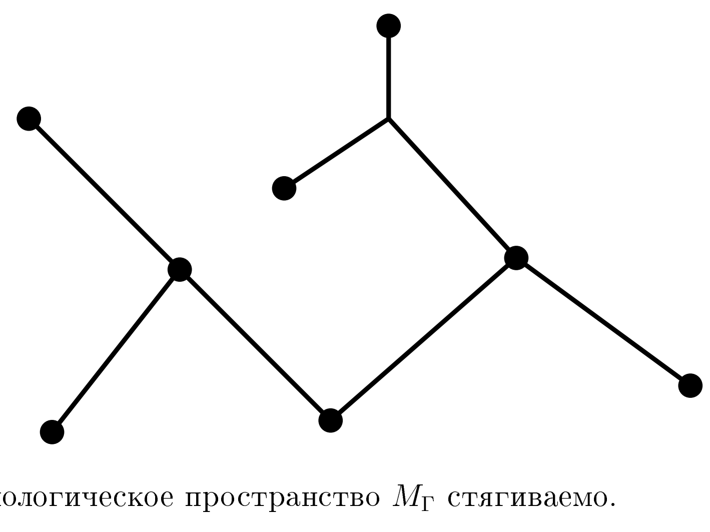
Более строго, Г можно определить как пару множеств $\mathcal{V}$, $\mathcal{R}$ и сюрьективное отображение $\{\mathcal{R}\} \times \{/, \infty\} \xrightarrow{-} \{\mathcal{V}\}$. Введем на $\{\mathcal{R}\} \times [/, \infty]$, отношение эквивалентности, порожденное следующим: концы двух ребер эквивалентны, если они примыкают к одной и той же вершине. Это отношение эквивалентности склеивает концы ребер, прилегающих к одной и той же вершине. Фактор $\{\mathcal{R}\} \times [/, \infty]$ по этому отношению эквивалентности называется **топологическим пространством графа**.

Задача 8.49. Докажите, что топологическое пространство любого графа хаусдорфово.

Задача 8.50. Граф называется **связным**, если любая вершина соединена с любой другой конечной цепочкой ребер. Докажите, что топологическое пространство связного графа линейно связно.

Задача 8.51 (**). Пусть дан граф с бесконечным множеством вершин. Докажите, что в графе найдется бесконечное подмножество вершин, попарно соединенных ребрами, либо бесконечное подмножество вершин, попарно несоединенных.

Задача 8.52 (!). Пусть Г – связный граф, у которого n вершин и $n-1$ ребро (такой граф называется **деревом**).



Докажите, что его топологическое пространство M_Γ стягиваемо.

Задача 8.53 (*). Пусть Γ – такой бесконечный связный граф, что любой связный конечный подграф Γ – дерево. Докажите, что $\pi_1(M_\Gamma) = \{1\}$.

Задача 8.54 (*). Пусть S^n – n-мерная сфера ($n > 1$). Докажите, что S^n односвязна.

Указание. Воспользуйтесь учением о геодезической связности.

Накрытия

Определение 8.18. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – непрерывное отображение топологических пространств. Отображение π называется **накрытием**, если у каждой точки есть такая окрестность U, что $\pi^{-1}(U)$ изоморфно произведению U и дискретного топологического пространства K, причем стандартное отображение $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$ совпадает с естественной проекцией $\pi^{-1}(U) = U \times K \longrightarrow U$. В этом случае также говорится, что $\tilde{M}$ **накрывает** M.

Мы рассматриваем окружность S^1 как фактор $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Это задает естественную групповую структуру на S^1.

Задача 8.55. Пусть n – ненулевое целое число. Рассмотрим естественное отображение $S^1 \longrightarrow S^1$, $t \longrightarrow nt$. Докажите, что это накрытие.

Задача 8.56. Докажите, что естественная проекция $\mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – накрытие.

Задача 8.57. Докажите, что естественная проекция $\mathbb{R}^n \longrightarrow (S^1)^n$ это накрытие

Задача 8.58. Рассмотрим фактор $S^n \longrightarrow S^n/\{\pm 1\} = \mathbb{R}P^n$ сферы по центральной симметрии, с естественной топологией (открытые множества - это такие, прообраз которых открыт). Докажите, что это накрытие.

Задача 8.59. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $\tilde{M}' \subset \tilde{M}$ – подпространство, которое тоже накрывает M. Докажите, что $\tilde{M}'$ открыто и замкнуто в $\tilde{M}$.

Задача 8.60. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а M локально линейно связно. Докажите, что $\tilde{M}$ локально линейно связно. Докажите, что любая компонента линейной связности в $\tilde{M}$ накрывает M.

Задача 8.61 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а M локально линейно связно. Докажите, что $\tilde{M}$ связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

Определение 8.19. Пусть $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ – некоторый путь, а $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие M. Отображение $\tilde{\gamma}: [a,b] \longrightarrow \tilde{M}$ называется **поднятием** γ, если $\tilde{\gamma} \circ \pi = \gamma$.

Задача 8.62 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ – путь, соединяющий x и y. Докажите, что для каждого $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$, существует и единственно поднятие $\tilde{\gamma}$, переводящее a в $\tilde{x}$.

Задача 8.63 (!). Докажите, что гомотопные пути поднимаются до гомотопных путей, а $\tilde{\gamma}(y) \in \pi^{-1}(\{y\})$ однозначно определяется классом гомотопии γ в $\Omega(M,x,y)$ и точкой $\tilde{x}$.

Замечание. Обозначим через $\pi_1(M, x, y)$ множество классов гомотопии путей из x в y. Мы получили отображение

$$\pi^{-1}(\{x\}) \times \pi_1(M, x, y) \xrightarrow{\Psi} \pi^{-1}(\{y\})$$

Определение 8.20. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а M линейно связно. Пространство $\tilde{M}$ называется **универсальным накрытием**, если оно связно и односвязно.

Замечание. Односвязность была определена только для линейно связных пространств. Но это ничему не мешает, поскольку из задачи 8.61 следует, что $\tilde{M}$ линейно связно.

Задача 8.64 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – универсальное накрытие. Зафиксируем $x \in M$ и $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$. Рассмотрим отображение $\pi_1(M, x) \xrightarrow{\psi} \pi^{-1}(\{x\})$, построенное в 8.63, $\psi(\gamma) = \Psi(\tilde{x}, \gamma)$. Докажите, что это биекция.

Задача 8.65. Докажите, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Задача 8.66. Докажите, что $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$.

Задача 8.67 (*). Докажите, что при $(n > 1)$ имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 8.68. Найдите фундаментальные группы всех букв русского алфавита, кроме “ф” и “В” (точнее, графов, смоделированных на этих буквах).

Задача 8.69 (*). Дан конечный связный граф, у которого n ребер и n вершин. Пусть M – его топологическое пространство. Докажите, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$.