C^2-оценки в теореме Калаби-Яу

Миша Вербицкий

Содержание

1 Введение

Эта лекция есть продолжение рассказа о доказательстве Калаби-Яу, выложенного сюда: http://lj.rossia.org/community/ljr-math/14747.html

C^2 и C^3-оценки в доказательстве теоремы Калаби-Яу считаются более элементарными, чем C^0-оценки; отчасти из-за существования аналогичных оценок в локальном случае ([C]; также см. обзор Трудингера на ICM-2006 [T] и его работы последних лет). Разумеется, для доказательства C^2-оценок используются уже доказанные C^0-оценки, но даже вывод C^2-оценок из C^0-оценок – трудоемкий и нетривиальный.

В отличие от ситуации, описанной Софией Чен и Трудингером, C^2-оценки для решений комплексного Монжа-Ампера нелокальны, а требуют компактности многообразия. Работа Софии Чен дает локальные C^2-оценки для решений такого уравнения:

$$F(W(\varphi)) = \Psi.$$

Здесь Ψ – заданная функция, φ-неизвестная функция, а F – отображение из 2-тензоров в функции, выпуклое и невырожденное в том же смысле, в котором выпуклы и невырожденны детерминант и фундаментальные симметрические полиномы от собственных значений соответствующей матрицы. Выражение $W(\varphi) \in \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1(M)$ – 2-тензор вида

$$W(\varphi) = D^2\varphi + a(x)d\varphi \wedge d\varphi + b(x)|d\varphi|^2 g + c,$$

где g – риманова метрика, $a(x)$ и $b(x)$ – заданные функции, а c - тензор. К сожалению, для применения оценок, выведенных Чен, требуется, чтобы $b(x) < -\varepsilon < 0$, а для комплексного Монжа-Ампера $a = b = c = 0$. То же условие требуется в работах Трудингера с соавторами.

Вывод C^2-оценок приводится в нескольких статьях Збигнева Блоцкого на его сайте [1]. Там все интересно, но мне оказалась особенно полезной статья [Bl].

Локальные C^2-оценки решений комплексного Монжа-Ампера приводятся в статье Шульца [S], где он выводит их из C^1-оценок. Поскольку C^1-оценки для решений комплексного Монжа-Ампера на компактном многообразии получить труднее, чем C^2-оценки, применить эту работу к теореме Калаби-Яу нельзя. Впрочем, по мнению Славомира Колодзея (ссылающегося на Блоцкого) работа Шульца содержит ошибку, которую до сих пор никто не исправил.

2 C^2-оценки

ТЕОРЕМА: (Błocki, [Bl]) Пусть (M, ω) – компактное кэлерово многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, а $\varphi \in C^4(M)$ – решение уравнения Монжа-Ампера

$$(\omega + \partial\overline{\partial}\varphi)^n = f\omega^n,$$

где f – гладкая, положительная функция. Тогда есть константа $C > 0$, зависящая только от M, ω, $\sup\varphi - \inf\varphi$, $\sup f$ и $\inf(f/(n-1)\Delta\log f)$ такая, что $\Delta\varphi < C$ везде на M.

Для теоремы Калаби-Яу зависимость от f не слишком важна, и мы не будем ее отслеживать; важно, что есть константы, которые явно зависят от f и ее производных, и ограничивают $\Delta\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Идея доказательства принадлежит Погорелову, который таким образом получил оценки на решения вещественного уравнения Монжа-Ампера. Введем на M локально комплексные координаты; производную функции $h: M \longrightarrow \mathbb{R}$ в голоморфном направлении обозначим h_i, в антиголоморфном $h_{\bar{i}}$. Пусть

$$\alpha := \log(\Delta\varphi + n) - A\varphi,$$

где A – константа, которую мы зададим позже. Пусть g – кэлеров потенциал для ω (определенный локально), а $u = g + \varphi$. Тогда $\Delta\varphi + n = \Delta u$, поэтому

$$\alpha_p = \frac{(\Delta u)_p}{\Delta u} - A\varphi_p,$$

[1] http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki/publ/index.html

и

$$\alpha_{p\bar{p}} = \frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{\Delta u} - \frac{|(\Delta u)_p|^2}{(\Delta u)^2} + A - Au_{p\bar{p}}. \qquad (2.1)$$

Возьмем точку O, где α достигает максимума. Мы докажем, что в O $\Delta\varphi$ ограничена константой, которая выражается через f и его производные и кривизну M. Поскольку φ ограниченно в силу C^0-оценок, из этого следует C^2-оценка. Компактность M нужна только в этом месте, все последующие аргументы локальны в окрестности O.

Выберем голоморфные координаты в O таким образом, чтобы метрика имела диагональный вид, с единицами на диагонали, $g_{i\bar{j}k}$ занулялось, а $\varphi_{i\bar{j}}$ было диагонально. В точке O производные Δu по координатам записываются так:

$$(\Delta u)_p = \sum_j u_{j\bar{j}p},$$

$$(\Delta u)_{p\bar{p}} = \sum_j u_{j\bar{j}p\bar{p}} + \sum_j R_{j\bar{j}p\bar{p}} u_{j\bar{j}}, \qquad (2.2)$$

где $R_{j\bar{j}p\bar{p}} = -g_{j\bar{j}p\bar{p}}$ – кривизна. Обозначим за $\tilde{f}$ функцию $f\det(g_{p\bar{q}}) = \det(u_{p\bar{q}})$. Тогда

$$(\log\tilde{f})_j = u^{p,\bar{q}} u_{p\bar{q}j}.$$

Здесь $u^{p,\bar{q}}$ обозначает бивектор, полученный из гессиана $u_{p\bar{q}}$ посредством изоморфизма $T^{1,0}(M) \cong \Lambda^{0,1}(M)$, полученного из метрики. Отметим, что в O $u^{p,\bar{p}} = u^{-1}_{p,\bar{p}}$, потому что g_{ij} в O – единичная матрица.

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\Delta(\log\tilde{f})_{j\bar{j}} = u^{p,\bar{q}} u_{p\bar{q}j\bar{j}} - u^{p,\bar{t}} u^{s,\bar{q}} u_{p\bar{q}j} u_{s\bar{t}\bar{j}}. \qquad (2.3)$$

Поэтому

$$(\log\tilde{f})_{j\bar{j}} = (\log f)_{j\bar{j}} + g^{p,\bar{q}} g_{p\bar{q}j\bar{j}} - g^{p,\bar{t}} g^{s,\bar{q}} g_{p\bar{q}j} g_{s\bar{t}\bar{j}}.$$

Суммируя это выражение по j, получаем

$$\Delta(\log\tilde{f}) = \Delta(\log f) + W_1,$$

где W_1 выражается через кривизну. Воспользовавшись выражением (2.3) для $(\log\tilde{f})_{j\bar{j}}$, получаем в O

$$\sum_{j,p} \frac{u_{p\bar{p}j\bar{j}}}{u_{p\bar{p}}} = \Delta(\log f) + \sum_{j,p,q} \frac{|u_{p\bar{q}j}|^2}{u_{p\bar{p}} u_{q\bar{q}}} + W_1 \qquad (2.4)$$

Поскольку у α в O максимум, $\alpha_{p\bar{p}} \leqslant 0$ в O. А коль скоро u плюрисубгармонично, имеем $0 \geqslant \frac{\alpha_{p\bar{p}}}{u_{p\bar{p}}}$. Суммируя по p и применяя выражение (2.1) для $\alpha_{p\bar{p}}$, получаем

$$0 \geqslant \sum_p \frac{\alpha_{p\bar{p}}}{u_{p\bar{p}}} = \frac{1}{\Delta u}\left[\frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{u_{p\bar{p}}} - \frac{|(\Delta u)_p|^2}{u_{p\bar{p}} \cdot \Delta u}\right] + A\sum_p \frac{1}{u_{p\bar{p}}} - nA. \qquad (2.5)$$

Разность в квадратных скобках в правой части (2.5) можно оценить более простым выражением. В силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца,

$$|(\Delta u)_p|^2 = \left(\sum_j u_{j\bar{j}p}\right)^2 \leqslant \sum_j (u_{j\bar{j}p})^2 \leqslant \Delta u \sum_j \frac{|u_{j\bar{j}p}|^2}{u_{j\bar{j}}}.$$

Поэтому вычитаемое в квадратных скобках удовлетворяет неравенству

$$\sum_p \frac{|(\Delta u)_p|^2}{u_{p\bar{p}} \cdot \Delta u} \leqslant \sum_{p,j} \frac{|u_{j\bar{j}p}|^2}{u_{j\bar{j}} \cdot u_{p\bar{p}}} \leqslant \sum_{p,q,j} \frac{|u_{p\bar{q}j}|^2}{u_{p\bar{p}} u_{q\bar{q}}} \qquad (2.6)$$

Частное $\frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{u_{p\bar{p}}}$ можно упростить, воспользовавшись формулой (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{u_{p\bar{p}}} &= \sum_{j,p} \frac{u_{j\bar{j}p\bar{p}}}{u_{p\bar{p}}} = \\ &= \sum_{j,p} \frac{u_{p\bar{p}j\bar{j}}}{u_{p\bar{p}}} + \sum_j R_{j\bar{j}p\bar{p}} \frac{u_{j\bar{j}}}{u_{p\bar{p}}} = \qquad (2.7) \\ &= \sum_{j,p,q} \frac{|u_{p\bar{q}j}|^2}{u_{p\bar{p}} u_{q\bar{q}}} + W_2 + \sum_j R_{j\bar{j}p\bar{p}} \frac{u_{j\bar{j}}}{u_{p\bar{p}}} \end{aligned}$$

где W_2 зависит от f и кривизны M. Вычитая (2.6) из (2.7), получаем следующее неравенство для разности в квадратных скобках в правой части (2.5):

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\Delta u)_{p\bar{p}}}{u_{p\bar{p}}} - \frac{|(\Delta u)_p|^2}{u_{p\bar{p}} \cdot \Delta u}\right] &\geqslant \sum_{j,p,q} \frac{|u_{p\bar{q}j}|^2}{u_{p\bar{p}} u_{q\bar{q}}} + W_2 - \sum_{j,p,q} \frac{|u_{p\bar{q}j}|^2}{u_{p\bar{p}} u_{q\bar{q}}} + \sum_{j,p} R_{j\bar{j}p\bar{p}} \frac{u_{j\bar{j}}}{u_{p\bar{p}}} \\ &= W_2 + \sum_{j,p} R_{j\bar{j}p\bar{p}} \frac{u_{j\bar{j}}}{u_{p\bar{p}}} \end{aligned}$$

Мы существенно упростили (2.5):

$$0 \geqslant A\sum_p \frac{1}{u_{p\bar p}} - nA + \frac{1}{\Delta u}W_2 + \frac{1}{\Delta u}\sum_{j,p} R_{j\bar j p\bar p}\frac{u_{j\bar j}}{u_{p\bar p}} \tag{2.8}$$

Поскольку $\prod u_{p\bar p} = f(O)$, из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, для любого фиксированного q,

$$\sum_p \frac{1}{u_{p\bar p}} \geqslant \sum_{p\neq q} \frac{1}{u_{p\bar p}} \geqslant \sqrt[n-1]{\frac{(n-1)u_{q\bar q}}{f(O)}}.$$

Возводя в $n-1$-ю степень и суммируя по q, получаем

$$\left(\sum_p \frac{1}{u_{p\bar p}}\right)^{n-1} \geqslant C_1\Delta u$$

где $C_1 = \frac{f(O)}{n-1}$. Это позволяет оценить сумму $\sum_{j,p} R_{j\bar j p\bar p}\frac{u_{j\bar j}}{u_{p\bar p}}$ (последний член правой части (2.8)):

$$\left|\sum_{j,p} R_{j\bar j p\bar p}\frac{u_{j\bar j}}{u_{p\bar p}}\right| \leqslant C_2\sum_{j,p}\frac{u_{j\bar j}}{u_{p\bar p}} \leqslant C_2\sum_p \frac{\Delta u}{u_{p\bar p}} \leqslant C_3(\Delta u)^{\frac{n}{n-1}},$$

где константа C_2 выражается через кривизну, а C_3 через C_2 и C_1. Применяя это к (2.8), получаем

$$0 \geqslant A(C_1\Delta u)^{\frac{n}{n-1}} - nA\Delta u + W_2 - C_3(\Delta u)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{2.9}$$

Выберем A достаточно большим, чтобы $B := C_1A - C_3 > 0$ (тут используется, что $C_1 = \frac{f(O)}{n-1} > 0$). Тогда из (2.9) получится

$$B(\Delta u)^{\frac{n}{n-1}} \leqslant nA\Delta u + W_2,$$

что дает оценку сверху на Δu.

Список литературы

[Be] A. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, 1987.

[Bl] Zbigniew Błocki *A gradient estimate in the Calabi-Yau theorem,* http://gamma.im.uj.edu.pl/ blocki/publ/index.html (preprint).

[C] Szu-yu Sophie Chen, *Local Estimates for Some Fully Nonlinear Elliptic Equations*, arXiv:math/0510652.

[J] Joyce, D., *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000.

[S] F. Schulz, *A C^2-estimate for solutions of complex Monge-Ampére equations,* J. Reine Angew. Math. 348 (1984), 88-93.

[T] Neil Trudinger, *Recent developments in elliptic partial differential equations of Monge-Ampere type*, International Congress of Mathematicicians, Madrid, August 2006