C^0-оценки в теореме Калаби-Яу

Миша Вербицкий

Содержание

1 Введение **1**

2 Комплексное уравнение Монжа-Ампера **2**
2.1 Теорема Калаби-Яу и уравнение Монжа-Ампера 2
2.2 Единственность решений Монжа-Ампера 3
2.3 Метод непрерывности 4

3 Априорные оценки на решения Монжа-Ампера **4**
3.1 Получение априорной L^2-оценки решений Монжа-Ампера 5
3.2 Выведение $L^{p\mu}$-оценки из L^p-оценки 7

4 Теорема Обана-Калаби-Яу **9**
4.1 Метрики Кэлера-Эйнштейна 9
4.2 Уравнение Обана-Калаби-Яу 10

1 Введение

Теорема Калаби-Яу является в определенном смысле "основной теоремой алгебраической геометрии", ибо практически любой труд по многообразиям Калаби-Яу, гиперкэлеровым либо зеркальной симметрии основывается на теореме Калаби-Яу и ее использует. Плюс к тому, естественно, вся струнная физика.

Доказательство этой теоремы населению непонятно, ее используют в качестве "черного ящика"; людей, разбиравших доказательство целиком, очень мало. Я расскажу вкратце, как оно устроено, и воспроизведу самую простую из нужных оценок.

Итак, мы имеем дело с компактным кэлеровым мноообразием

$$(M, I, g, \omega, \rho), \dim_{\mathbb{C}} M = n.$$

Здесь I - оператор комплексной структуры, g метрика, $\omega(x,y) := g(x, Iy)$ эрмитова форма, а $\rho := \Theta_K$ кривизна канонического класса, являющаяся (1,1)-формой. **Кривизной Риччи** многообразия M называется симметрическая форма $\sqrt{-1}\rho(x, Iy)$. Обычное определение кривизны Риччи другое (и более общее), но для кэлеровой геометрии это удобнее.

M называется **многообразием Калаби-Яу**, если на нем задано невырожденное сечение канонического класса Ω. В этом случае, естественно, ρ когомологично нулю. Если $\rho = 0$, M называется **Риччи-плоским**. Риччи-плоские кэлеровы метрики называются метриками Калаби-Яу.

ТЕОРЕМА 1 (Калаби-Яу) Пусть $(M, I, g, \omega, \rho, \Omega)$. - многообразие Калаби-Яу. Тогда в классе когомологий $[\omega]$ существует и единственна метрика Калаби-Яу.

Единственность метрики Калаби-Яу была доказана Калаби в начале 1950-х, существование - предложено Калаби как гипотеза, и доказано Яу в 1976; за этот результат Яу дали различные премии.

Та часть доказательства, за которую отвечает Калаби, весьма красивая. Сначала надо переформулировать свойство риччи-плоскости в терминах уравнения Монжа-Ампера, это делается так.

2 Комплексное уравнение Монжа-Ампера

2.1 Теорема Калаби-Яу и уравнение Монжа-Ампера

Заметим, что канонический класс M тривиализован формой Ω. В этой тривиализации, метрика на каноническом классе записывается так:

$$|\Omega|^2 = \frac{\Omega \wedge \overline{\Omega}}{\mathrm{Vol}_M}$$

где Vol_M - форма риманова объема на M. Это определение метрики на кан. классе. Кривизна канонического класса записывается, по известной формуле, так

$$\rho = dd^c \log |\Omega|^2$$

С другой стороны,

$$\mathrm{Vol}_M = \frac{1}{2^n n!}\omega^n.$$

Поэтому $\rho = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\omega^n}{\Omega \wedge \overline{\Omega}} = const. \tag{2.1}$$

Обозначим за d^c "скрученный дифференциал де Рама"$-IdI$. Две разные кэлеровы формы в одном классе когомологий отличаются на $dd^c\varphi$, где φ это функция. Это следует из известной "dd^c-леммы".

ЛЕММА (dd^c-лемма) Если η точная (p,q)-форма на компактном кэлеровом многообразии, то $\eta = dd^c\eta'$, для какой-то (p-1,q-1)-формы η'.

Поэтому риччи-плоскую кэлерову метрику можно искать в виде $\omega + dd^c\varphi$. Уравнение (2.1) в такой ситуации равносильно такому

$$\frac{(\omega + dd^c\varphi)^n}{\omega^n} = e^f, \tag{2.2}$$

где $e^f = \frac{\Omega\wedge\overline{\Omega}}{\omega^n}$.

Это уравнение называется "уравнение Монжа-Ампера". Напишем

$$MA(\varphi) := \frac{(\omega + dd^c\varphi)^n}{\omega^n}.$$

В силу (2.1), метрика $\omega + dd^c\varphi$ является Риччи-плоской тогда и только тогда, когда $MA(\varphi) = e^f$.

Отметим, что из (2.2) сразу следует, что (1,1)-форма $\omega + dd^c\varphi$ положительно определена. Действительно, детерминант этой формы положителен, значит сигнатура ее постоянна. С другой стороны, в точке, где φ достигает минимума, (1,1)-forma $dd^c\varphi$ положительна, значит, $\omega + dd^c\varphi$ положительно определена.

Поэтому вот такое утверждение равносильно теореме Калаби-Яу

ТЕОРЕМА 2. Пусть (M, ω) - компактное кэлерово многообразие (не обязательно Калаби-Яу), а f - любая гладкая функция на M, такая, что

$$\int_M e^f\omega^n = \int_M \omega^n. \tag{2.3}$$

Тогда $MA(\varphi) = e^f$ имеет решение φ, причем единственное (с точностью до константы).

Именно его и доказывают.

2.2 Единственность решений Монжа-Ампера

Пусть ω_1, ω_2 - кэлеровы формы, соответствующие двум разным решениям уравнения Монжа-Ампера, $\omega_i = \omega + dd^c\varphi_i$, и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Поскольку $\omega_1^n = \omega_2^n$, имеем

$$0 = \omega_1^n - \omega_2^n = (\omega_1 - \omega_2) \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \omega_1^{n-3} \wedge \omega_2^2 + ...)$$

Обозначим $(n-1, n-1)$-форму в скобках за P. Это уравнение переписывается как

$$dd^c\varphi \wedge P = 0.$$

Форма P положительна; воспользовавшись нехитрой линейной алгеброй, нетрудно убедиться, что $P = \alpha^{n-1}$, где α есть положительная $(1,1)$-форма. Но уравнение $dd^c\varphi \wedge \alpha^{n-1} = 0$ означает, что φ гармонична относительно оператора Лапласа, связанного с α. Значит, φ - константа.

2.3 Метод непрерывности

Яу доказал свою теорему посредством изобретенного им "метода непрерывности". А делается это так.

Напишем уравнение с параметром $t \in [0,1]$,

$$MA(\varphi) = A_t e^{tf}, \tag{2.4}$$

где A_t - вещественная константа, выбираемая таким образом, чтобы $\int_M \omega^n = \int_M A_t e^{tf}\omega^n$. При $t = 0$ это уравнение имеет решение $\varphi = 0$, а при $t = 1$ превращается в искомое. Обозначим за S подмножество $[0,1]$, при котором (2.4) имеет решение. Яу доказал, что S одновременно открыт и замкнут, таким образом, совпадает с [0,1]. Это и называется "метод непрерывности".

Оператор $MA(\varphi)$ эллиптический, и его линеаризация это оператор Лапласа. Поэтому на соответствующем банаховом пространстве MA действует как изоморфизм, в частности, является наложением. Чтобы доказать, что решение Монжа-Ампера, полученное таким образом (обобщенное, соответственно, возможно, особое) является гладкой функцией, требуется оценка на это решение и его производные. Чтобы доказать, что предел решений Монжа-Ампера опять решение Монжа-Ампера, нужно нечто вроде теоремы Арцела-Асколи, то есть равномерная непрерывность и ограниченность решений. Для этого тоже нужны оценки. Таким образом, теорема Калаби-Яу вытекает из "априорных оценок"на решения и их производные, в терминах M, ω и f.

3 Априорные оценки на решения Монжа-Ампера

Напомню, что C^0-норма на сечениях расслоения B с метрикой на компактном римановом многообразии задается как

$$|\varphi|_{C^0} = \sup |\varphi|.$$

Если ж на B задана связность ∇, можно взять ее k-ю степень (применяя где надо связность Леви-Чивита), $\nabla^k : B \longrightarrow (\Lambda^1)^{\otimes k} B$. Тогда $|\varphi|_{C^k}$ есть C_0-норма $\nabla^k\varphi$,

$$|\varphi|_{C^k} = \sup |\nabla^k\varphi|,$$

ТЕОРЕМА 3. В условиях Теоремы 2, предположим, что φ - решение уравнения Калаби-Яу, $MA(\varphi) = e^f$, причем $\int_M \varphi \operatorname{Vol}_M = 0$ (последнее условие нужно, потому что φ определено с точностью до константы). Тогда существуют константы A_0, A_2, A_3, зависящие от ω и f, такие, что норма φ ограничена следующим образом

$$|\varphi|_{C^0} < A_0, \quad |\varphi|_{C^2} < A_2, \quad |\varphi|_{C^3} < A_3,$$

Оценки эти доказываются последовательно: нулевая, из нее выводится вторая и третья. Нулевая самая трудная, но концептуально, наоборот, наиболее внятная. Я расскажу только про нее.

Схема доказательства этой оценки такая.

1. Получаем L^2-оценку на φ.

2. Из L^p-оценки выводим $L^{p\mu}$-оценку, где $\mu = \frac{2n}{2n-1}$. По индукции получаем, $|\varphi|_{L^p}$ для всех $p2$ ограничена константой, выражающейся через f и ω.

3. Это дает оценку на $|\varphi|_{L^\infty}$. Но L^∞-норма и есть C^0-норма.

3.1 Получение априорной L^2-оценки решений Монжа-Ампера

Пусть $\omega_1 = \omega + dd^c\varphi$ - решение уравнения Монжа-Ампера $\omega_1^n = e^f\omega$. Тогда

$$(1-e^f)\omega^n = \omega^n - \omega_1^n = dd^c\varphi\wedge(\omega^{n-1}+\omega^{n-2}\wedge\omega_1+\omega^{n-3}\wedge\omega_1^2+...) = dd^c\varphi\wedge P,$$

где $P = \alpha^{n-1}$ - $(n-1, n-1)$-форма, определенная чуть выше. По построению, ясно, что $\alpha \geqslant \omega$ (т.е. собственные значения формы $\alpha - \omega$ неотрицательны. Поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(\alpha, M)(d\varphi, d\varphi)_\alpha &= \int_M d\varphi\wedge d^c\varphi\wedge P \\ &\geqslant \int_M d\varphi\wedge d^c\varphi\wedge\omega^{n-1} = \operatorname{Vol}_M(d\varphi, d\varphi)_\omega\end{aligned}$$

где $\operatorname{Vol}(\alpha, M)$ обозначает риманов объем M, взятый относительно эрмитовой формы α. Домножив форму ω на константу, можно считать, что риманов объем Vol_M равен 1. Мы будем работать в этом предположении. Тогда из вышеприведенного неравенства следует, что

$$\int_M d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge P \geqslant |d\varphi|^2_{L^2} \tag{3.5}$$

Воспользовавшись формулой Стокса, напишем

$$0 = \int_M d(\varphi \wedge d^c\varphi \wedge P) = \int \varphi dd^c\varphi \wedge P + \int_M d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge P. \tag{3.6}$$

Поскольку $(1 - e^f)\omega^n = dd^c\varphi \wedge P$, имеем

$$\int \varphi dd^c\varphi \wedge P \leqslant |\varphi|_{L^1} C$$

где $C = \sup|1 - e^f|$. Поэтому (3.6) влечет

$$C|\varphi|_{L^1} \geqslant \int_M d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge P \geqslant |d\varphi|^2_{L^2} \tag{3.7}$$

(последнее неравенство следует из (3.5).)

Напомню неравенство Гельдера:

ЛЕММА (неравенство Гельдера)
На компактном многообразии, имеем

$$|x|_{L^p}|y|_{L^p} \geqslant |xy|_{L^r},$$

если $r = \frac{pq}{p+q}$, и $r, p, q \geqslant 0$.

■

Подставляя $y = 1$, получаем

$$|x|_{L^p}(\mathrm{Vol}_M)^{1/p} \geqslant |x|_{L^r}$$

Поскольку $\mathrm{Vol}_M = 1$, это неравенство означает, что $|x|_{L^p}$ неубывает как функция p. В частности,

$$|\varphi|_{L^1} \leqslant |\varphi|_{L^2}.$$

Также имеем $|d\varphi|_{L^2} \leqslant \lambda^{-1}|\varphi|_{L^2}$, где λ - наименьшее собственное значение лапласиана на функциях. Подставляя это в (3.7), получаем

$$C\lambda^{-1}|\varphi|_{L^2} \geqslant |\varphi|^2_{L^2}.$$

т.е. $|\varphi|_{L^2} \leqslant C\lambda^{-1}$. L^2-оценка получена.

3.2 Выведение $L^{p\mu}$-оценки из L^p-оценки

Хочу отметить, что функция $\varphi|\varphi|^{p-1}$ определена для любого вещественного p, и ее дифференциал равен

$$d(\varphi|\varphi|^{p-1}) = (p-1)|\varphi|^{p-2}d\varphi$$

Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M d(\varphi|\varphi|^{p-1} \wedge d^c\varphi \wedge P) \\ &= \int_M \varphi|\varphi|^{p-1} dd^c\varphi \wedge P + (p-1)\int_M |\varphi|^{p-2} d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge P. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Пользуясь $(1-e^f)\omega^n = dd^c\varphi \wedge P$, получаем, что первый член слева от равенства (3.8) оценивается как

$$\int_M \varphi|\varphi|^{p-1} dd^c\varphi \wedge P \leqslant C|\varphi|^{p-1}_{L^{p-1}} \tag{3.9}$$

Также имеем

$$\int_M |\varphi|^{p-2} d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge P = \frac{4}{p^2}\int_M d(|\varphi|^{p/2}) \wedge d^c(|\varphi|^{p/2}) \wedge P.$$

Рассуждение, аналогичное приведенному выше, дает

$$\int_M |\varphi|^{p-2} d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge P \geqslant |d(|\varphi|^{p/2})|^2_{L^2}.$$

Сравнивая это с (3.9), получаем

$$C|\varphi|^{p-1}_{L^{p}-1} \geqslant \frac{4(p-1)}{p^2}|d(|\varphi|^{p/2})|^2_{L^2}.$$

Это обобщение аналогичного неравенства, полученного при выводе L^2-оценки. В предлопожении $p \geqslant 2$, констант справа от неравенства можно упростить, ибо она меньше $1/p$. Поэтому

$$Cp|\varphi|^{p-1}_{L^{p}-1} \geqslant |d(|\varphi|^{p/2})|^2_{L^2}. \tag{3.10}$$

Воспользуемся леммой Соболева

ЛЕММА (Соболев).
Пусть ψ - гладкая функция на m-мерном многообразии, $\mu := \frac{m}{m-1}$. Тогда

$$|\psi|^2_{L^{2\mu}} \leqslant const(|d\psi|^2_{L^2} + |\psi|^2_{L^2})$$

Доказательство:
Естественное отображение соболевских пространств
$$L^2_1(M) \longrightarrow L^{2\mu}$$
непрерывно. ■

Теперь, из (3.10) сразу вытекает
$$Cp|\varphi|^{p-1}_{L^p-1} \geqslant |\varphi|^p_{L^{\mu p}} - |\varphi|^p_{L^p}$$
Нужная нам форма неравенства такая
$$|\varphi|^p_{L^{\mu p}} \leqslant |\varphi|^p_{L^p} + Cp|\varphi|^{p-1}_{L^p-1}. \tag{3.11}$$
Рассмотрим функцию $R(p) := |\varphi|^p_{L^p}$. Эта функция неубывает, что легко видеть из неравенства Гельдера (мы предполагаем $\int_M \operatorname{Vol}_M = 1$). Тогда неравенство (3.11) переписывается в виде
$$R(\mu p) \leqslant (CpR(p-1) + R(p))^{\mu}. \tag{3.12}$$
Нам нужна оценка на $R(p)^{1/p}$. Из (3.12) получаем, что
$$R(\mu p) \leqslant (CpR(p))^{\mu}. \tag{3.13}$$
Пусть $x = \log p$, и $R_1(x) = \log R(e^x)$. Неравенство (3.13) переписывается в виде
$$R_1(v + x) \leqslant C + \mu(x + R_1(x)),$$
где $v = \log \mu$. Это рекурсивное неравенство гарантирует, что R_1 растет не быстрее, чем экспоненциально
$$R_1(kv) \leqslant \mu^k C_1$$
где $C_1 \geqslant \max(C\mu, 3v\mu)$. Иначе говоря,
$$R_1(x) \leqslant const \mu^x,$$
Получаем
$$R(p) \leqslant \exp(C_1 \mu^{\log p}) = \exp(C_1 p)$$
где константа C_1 зависит только от геометрии M и f. Из этого немедленно получаем оценку на $|\varphi|_{L^p} = R(p)^{1/p}$. Значит, $|\varphi|_{L^p}$ ограниченно универсальной константой для всех p. Такие функции, как легко видеть, ограничены той же самой константой, ибо
$$\lim_{p \longrightarrow \infty} |\varphi|_{L^p} = \sup |\varphi|.$$
Мы доказали C^0-оценку.

4 Теорема Обана-Калаби-Яу

4.1 Метрики Кэлера-Эйнштейна

Рассуждения Калаби и Яу отчасти обобщаются для многообразий с ненулевым каноническим классом. Пусть задано кэлерово многообразие

$$(M, I, g, \omega, \rho), \dim_{\mathbb{C}} M = n.$$

ρ обозначает кривизну канонического класса, то есть форму, представляющую $c_1(M)$. Предположим, что класс когомологий ω пропорционален $c_1(M)$: $\varepsilon[\omega] = [\rho]$. В случае многообразий Калаби-Яу, эта константа равна 0. Метрика ω называется **метрикой Кэлера-Эйнштейна**, если это равенство имеет место для дифференциальных форм:

$$\varepsilon\omega = \rho$$

Если константа ε неотрицательная, метрика Кэлера-Эйнштейна существует и единственна в данном классе когомологий $[\omega]$, при условии $\varepsilon[\omega] = [\rho]$. Это обобщение теоремы Калаби-Яу называется **теорема Обана-Калаби-Яу**, ее доказали Яу и Обан (Aubin) через несколько лет после того, как Яу доказал это же утверждение для $\varepsilon = 0$. Для отрицательного ε задача становится невероятно трудной - решений уравнения Обана-Калаби-Яу может не быть, или их может быть несколько. Это было известно еще Калаби.

Многообразия, удовлетворяющие $\varepsilon[\omega] = [\rho]$ с положительной константой - многообразия **общего типа** (канонический класс обилен), для отрицательной константы они называются **ногообразиями Фано** (обилен антиканонический класс). Задача нахождения метрик Кэлера-Эйнштейна на многообразиях Фано оказалась чрезвычайно важна в алгебраической геометрии, ибо сводится к вопросам стабильности многообразий в их пространствах модулей. Сейчас этой наукой занимаются очень много народу (Дональдсон, Тиан, Мабучи etc).

Пусть $\omega_1 = \omega + dd^c u$ - другая метрика в том же классе когомологий. Поскольку кривизна линейного расслоения выражается через модуль голоморфного вектора как $\rho = \log |v|^2$, кривизна канонического класса в метрике ω_1 будет записываться как

$$\rho_1 = \rho - dd^c \log MA(u),$$

где $MA(u) = \frac{(\omega+dd^c u)^n}{\omega^n}$. Запишем $\rho + dd^c f = \varepsilon\omega$. Теперь уравнение Кэлера-Эйнштейна $\omega_1 = \varepsilon\rho_1$ переписывается как

$$dd^c f + -dd^c \log MA(u)) = \varepsilon dd^c u.$$

Пользуясь тем, что dd^c на функциях инъективно (по модулю констант), это уравнение может быть переписано как

$$\log MA(u)) + \varepsilon u = f + const.$$

Это уравнение (f дано, u неизвестная) называется **уравнение Обана-Калаби-Яу**; когда $\varepsilon = 0$, оно превращается в уравнение Монжа-Ампера. Как и уравнение Монжа-Ампера, уравнение Обана-Калаби-Яу имеет единственное решение на любом кэлеровом многообразии, без ограничений на канонический класс.

4.2 Уравнение Обана-Калаби-Яу

Единственность решений Обана-Калаби-Яу и C^0-оценки для $\varepsilon > 0$ проще, чем при $\varepsilon = 0$, а для $\varepsilon < 0$ они гораздо труднее.

ТЕОРЕМА Пусть (M, ω) - компактное кэлерово многообразие, f гладкая функция, ε - положительная константа. Тогда существует единственное u такое, что

$$\log MA(u)) + \varepsilon u = f. \tag{4.14}$$

где $MA(u) = \frac{(\omega + dd^c u)^n}{\omega^n}$.

Я докажу единственность решений и C^0-оценки.

C^0-оценки на u элементарные. Рассмотрим точку x_0, где у u максимум. В этой точке форма $dd^c u$ отрицательна, следовательно, $MA(u) \leqslant 1$. Поскольку

$$\varepsilon u(x) = \log MA(u))(x) + f(x) \leqslant f(x),$$

имеем $\varepsilon u \geqslant \sup f$. Аналогично, $\varepsilon u \leqslant \sup f$. То есть минимум u и максимум u ограниченны константами, зависящими только от f и ε.

Единственность решений тоже легко видеть. Если u_1, u_2 решения (4.14), $u := u_1 - u_2$, то

$$\log MA(u_1) - \log MA(u_2) = \log \frac{(\omega_2 + dd^c u)^n}{\omega_2^n},$$

где $\omega_2 = \omega + dd^c u_2$. Поэтому имеем

$$\log \frac{(\omega_2 + dd^c u)^n}{\omega_2^n} + \varepsilon u = 0. \tag{4.15}$$

В силу того же самого аргумента, в точке максимума u $\omega_2 + dd^c u \leqslant \omega_2$, первый член в (4.15) отрицательный, и εu неположителен. Аналогично, в точке минимума u неотрицателен. Поэтому $u = 0$.

Список литературы

[B] A. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, 1987.

[J] Joyce, D., *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000.