Числа Виртингера и голоморфные симплектические вложения

Миша Вербицкий,

verbit@maths.gla.ac.uk, verbit@mccme.ru,

Светлой памяти А.Н.Тюрина посвящается

Пусть $X \hookrightarrow M$ голоморфно симплектическая иммерсия компактных кэлеровых голоморфно симплектических многообразий, $\dim X > 0$. Мы определяем **число Виртингера** $W(X)$ - численный инвариант иммерсии $X \hookrightarrow M$. Мы доказываем, что $W(X) \geqslant 0$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда образ иммерсии $X \hookrightarrow M$ трианалитичен, т.е. голоморфен по отношению к комплексным структурам I, J, K, индуцированным естественной гиперкэлеровой структурой на M. Если $X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow ...X_n \longrightarrow M$ последовательность голоморфных симплектических вложений, то $W(X_1) \leqslant W(X_2) \leqslant ... \leqslant W(X_n)$.

Contents

1 Введение

Хорошо известно, что каждое гиперкэлерово многообразие голоморфно симплектично (см. (2.1)). Иначе говоря, существует естественный функтор $\mathcal{F}$ из категории гиперкэлеровых многообразий (морфизмы - все иммерсии, совместимые с метрикой и действием кватернионов) в категорию голоморфных симплектических кэлеровых многообразий (морфизмы - все симплектические иммерсии, сохраняющие кэлеров класс).

Как следует из гипотезы Калаби, доказанной Яу (Теорема 2.3), каждое компактное голоморфно симплектическое кэлерово многообразие наделено гиперкэлеровой метрикой, которая канонически определяется выбором кэлерова класса. Поэтому функтор $\mathcal{F}$ определяет биекцию на классах изоморфизма объектов соответствующих категорий. С другой стороны, $\mathcal{F}$ не является эквивалентностью категорий: существуют голоморфные симплектические иммерсии, не совместимые с гиперкэлеровой структурой. Пример такой иммерсии был найден в [V2].

Рассмотрим вложение ι из K3-поверхности $\mathcal{M}$ в ее схему Гильберта точек $\mathcal{M}^{[3]}$, отображающую точку $x \in \mathcal{M}$ в пучок идеалов $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}/\mathfrak{m}_x^2$, где $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_M$ обозначает идеал всех функций, зануляющихся в x. В [V2] доказано, что ι не совместима с любой гиперкэлеровой структурой на $M^{[3]}$. Нетрудно построить другие примеры симплектических вложений из K3-поверхности в ее схему Гильберта. С другой стороны, для общей K3-поверхности, ее схема Гильберта вообще не допускает нетривиальных гиперкэлеровых подмногообразий ([V2]). Эти примеры служат мотивацией для следующего вопроса.

Вопрос 1.1: Пусть задано голоморфная симплектическая иммерсия $\varphi: X \hookrightarrow M$ комапктных многообразий. Как узнать, исходя из голоморфной симплектической геометрии X и M, совместима ли иммерсия φ с гиперкэлеровой структурой на M?

Пусть M компактное голоморфно симплектическое кэлерово многообразие, снабженное единственной гиперкэлеровой структурой совместимой с голоморфной симплектической структурой и кэлеровым классом (см. Замечание 2.4). В настоящей статье, мы определяем для каждого комплексного подмногообразия $X \subset M$ неотрицательное вещественное число $W(X)$, так называемое симплектическое число Виртингера (Определение 3.6). Мы доказываем, что $W(X) \leqslant 1$, и что равенство достигается тогда и только тогда, когда подмногообразие X согласовано с гиперкэлеровой структурой на M (Предложение 3.5). Для последовательности голоморфных симплектических иммерсий

$$X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 ... \hookrightarrow M$$

($\dim H^{2,0}(X_i) = 1$, $\dim H^1(X_i) = 0$ для всех $i > 1$, $\dim X_1 > 0$), мы доказываем следующее неравенство чисел Виртингера:

$$W(X_1) \leqslant W(X_2) \leqslant W(X_3) \leqslant ...$$

(Теорема 4.2) В частности, если для какого-то k подмногообразие X_k совместимо с гиперкэлеровой структурой, тогда для всекг $j > \kappa$, подмногообразие X_j тоже совместимо с гиперкэлеровой структурой. (Следствие 4.3).

2 Гиперкэлеровы многообразия

В этой секции мы приводим какое-то число основных (и хорошо известных) определений и теорем гиперкэлеровой геометрии. Необходимые ссылки и доказательства можно найти, например, в [Bes] и [Bea]

Определение 2.1: ([Bes]) **Гиперкэлерово многообразие** есть риманово многообразие, снабженное тремя комплексными структурами I, J, K, таким образом, что

(i) Метрика на M кэлерова по отношению к I, J, K

(ii) Рассмотрим комплекстные структуры I, J и K как эндоморфизмы касательного пространства TM, $I^2 = J^2 = K^2 = -1$. Тогда I, J, K удовлетворяют кватернионным соотношениям $I \circ J = -J \circ I = K$, определяя, таким образом, действие алгебры кватернионов на касательном пространстве TM.

Поскольку TM является кватернионным векторным пространством, его размерность кратна 4, а следовательно, комплексната размерность M четна. Для каждого кватерниона $L \in \mathbb{H}$, $L^2 = -1$, соответсвующий автоморфизм TM задает на M почти комплексную структуру. Легко проверить, что эта почти комплексная структура интегрируема ([Bes]). Такие кватернионы получаются как линейные комбинации вида $aI + bJ + cK$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Определение 2.2: Пусть M гиперкэлерово многообразие, а L, $L^2 = -1$ кватернион. Соответствующая комплексная структура на M называется **индуцированной комплексной структурой**. Многообразие M, L рассмотренное как кэлерово многообразие, обозначается (M, L). В таком случае, гиперкэлерова структура на M называется **совместимой с комплексной структурой** L. Мы говорим, что кэлерова метрика на (M, L) **гиперкэлерова** если она совместима с гиперкэлеровой структурой.

Пусть M гиперкэлерово многообразие; обозначим риманову метрику на M через $(\cdot,\cdot)$. Пусть $\omega_I := (\cdot, I(\cdot))$ обозначает стандартную кэлерову симплектическую форму на M, ассоциированную с I; эта форма замкнута и параллельна по отношению к связности Леви-Чивита. Подобным образом определяются формы ω_J и ω_K, которые тоже замкнуты и параллельны.

Простой линейно-алгебраический аргумент ([Bes]) показывает, что форма

$$\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K \tag{2.1}$$

имеет ходжев тип (2,0) на (M, I). Поскольку эта форма замкнута, она голоморфна. Легко видеть, что Ω всюду невырожденна. Она называется **каноническая голоморфно симплектическая форма многообразия** (M, I). Таким образом, для каждого гиперкэлерова многообразия M и индуцированной комплексной структуры L, подлежащее комплексное многообразиие (M, L) голоморфно симплектично. Гипотеза Калаби, доказанная Яу в [Y], дает обратное утверждение.

Теорема 2.3: ([Bea], [Bes]) Пусть X компактное комплексное многообразие, снабженное голоморфной симплектической формой, и ω - кэлерова форма на X. Тогда существует единственная гиперкэлерова метрика на X, кэлерова форма которой когомологична ω.

∎

Замечание 2.4: Гиперкэлерова метрика, вообще говоря, не определяет гиперкэлерову структуру единственным образом; в патологических ситуациях (на плоском многообразии, например) может случиться так, что несколько гиперкэлеровых структур совместимы с данной метрикой. Из (2.1) немедленно следует что метрика вместе с комплексной структурой и голоморфной симплектической структурой определяет гиперкэлерову структуру единственным образом.

Определение 2.5: ([Bea]) Связное и односвязное компактное гиперкэлерово многообразие M называется **простым** если M не может быть представлено как произведение двух гиперкэлеровых многообразий меньшей размерности:

$$M \neq M_1 \times M_2, \text{ where } dim\ M_1 > 0 \text{ and } dim\ M_2 > 0$$

Каждое компактное гиперкэлерово многообразие допускает конечное накрытие, которое изоморфно произведению гиперкэлерова тора и нескольких простых гиперкэлеровых многообразий ([Bo]). Ф.А.Богомолов доказал следующую теорему:

Теорема 2.6: [Bo] Пусть M компактное гиперкэлерово многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны.

(i) M просто

(ii) $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$, $\dim H^{2,0}(M,L) = 1$, где L - любая из индуцированных комплексных структур.

■

Теорема Калаби-Яу может быть сформулирована более точно с помощью Теоремы 2.6.

Теорема 2.7: ([Bea], [Bes]) Пусть M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ компактное голоморфно симплектическое кэлерово многообразие, Ω его голоморфная симплектическая форма, $[\omega] \in H^{1,1}(M)$ кэлеров класс и I комплексная структура. Предположим, что $\dim H^{2,0}(M) = 1$, $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$, и

$$\int_M \omega^n = \int_M (Re\Omega)^n. \tag{2.2}$$

Тогда существует единственная гиперкэлерова структура $(I,J,K,(\cdot,\cdot))$ на M, такая, что класс когомологий кэлеровой формы $\omega_I = (\cdot, I\cdot)$ равен $[\omega]$, а каноническая голоморфная симплектическая форма $\omega_J + \sqrt{-1}\,\omega_K$ равна Ω.

Доказательство: По теореме Калаби-Яу (Теорема 2.3), существует единственная гиперкэлерова метрика на M с кэлеровым классом $[\omega]$. Пусть $\mathcal{H}_1 = (I, J_1, K_1)$ - соответствующая тройка комплексных структур, а $\Omega_1 := \omega_{J_1} + \sqrt{-1}\,\omega_{K_1}$ - соответствующая голоморфная симплектическая форма. Поскольку $\dim H^{2,0}(M) = 1$, существует число $\lambda \in \mathbb{C}$, такое, что $\Omega_1 = \lambda\Omega$. Элементарное вычисление показывает, что

$$\int_M \omega^n = \int_M (Re\Omega_1)^n = \frac{1}{2^{n/2}}\binom{n}{n/2}\int_M (\Omega_1 \wedge \overline{\Omega}_1)^{\frac{n}{2}}$$

(см. Лемма 3.1), и

$$\int_M (Re\Omega)^n = \frac{1}{2^{n/2}}\binom{n}{n/2}\int_M (\Omega \wedge \overline{\Omega})^{\frac{n}{2}}.$$

Из (2.2), мы получаем

$$\int_M (\Omega\wedge\overline{\Omega})^{\frac{n}{2}} = \int_M (\Omega_1\wedge\overline{\Omega}_1)^{\frac{n}{2}}.$$

Следовательно, $|\lambda| = 1$. Напишем λ как $\lambda = a + b\sqrt{-1}$, $a^2 + b^2 = 1$. Рассмотрим гиперкэлерову структуру $\mathcal{H}$ с той же самой метрикой, и кватернионным действием заданным тройкой (I, J, K): $J = aJ_1 + bK$, $K = -bJ_1 + aK_1$. Легко видеть, что соответствующая голоморфная симплектическая форма $\omega_J + \sqrt{-1}\Omega_K$ равна $\lambda^{-1}\Omega_1$ равна Ω. Единственность гиперкэлеровой тройки (I, J, K) легко видеть, выразив J и K через Ω (см. (2.1)). Мы доказали Предложение 2.7. ∎

Определение 2.8: ([V1]) Пусть $X \subset M$ - замнкнутое подмножество гиперкэлерова многообразия M. X называется **трианалитическим** если X комплексно аналитическое подмножество (M, L) для каждой индуцированной комплексной структуры L.

Трианалитические подмногообразия были предметом долгой и плодотворной работы. Самые важные результаты о геометрии трианалитических подмногообразий следующие. Рассмотрим общую индуцированную комплексную структуру L на компактном гиперкэлеровом многообразии M. Тогда все замкнутые комплексно-аналитические подмножества (M, L) трианалитичны ([V1]). Более того, каждое трианалитическое подмногообразие $X \subset M$ допускает каноническое разрешение особенностей $\widetilde{X} \longrightarrow X$ ([V3]), и эта десингуляризация гиперкэлерова. Наконец, трианалитическое подмногообразие является образом гиперкэлеровой иммерсии $\widetilde{X} \hookrightarrow M$.

3 Числа Виртингера и трианалитические подмногообразия

Пусть M - компактное комплексное многообразие, снабженное гиперкэлеровой структурой $\mathcal{H} = (I, J, K, (\cdot,\cdot))$. Как всегда, мы обозначаем за $\omega = \omega_I = (\cdot, I\cdot)$ кэлерову форму M, за

$$\Omega = \omega_J + \sqrt{-1}\,\omega_K = (\cdot, J\cdot) + \sqrt{-1}\,(\cdot, K\cdot)$$

голоморфную симплектическую форму, и за $\overline{\Omega}$ ее комплексно сопряженную форму $\overline{\Omega} = \omega_J - \sqrt{-1}\,\omega_K$.

Впоследствии, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1: Пусть M компактное комплексное многообразие, снабженное гиперкэлеровой структурой, а $X \subset M$ замкнутое четномерное комплексное подмногообразие, $d = \dim_{\mathbb{C}} X$. Тогда

$$\binom{d}{\frac{1}{2}d} \int_X \left(\frac{\Omega \wedge \overline{\Omega}}{2}\right)^{\frac{d}{2}} = \int_X \omega_J^d = \int_X \omega_K^d \tag{3.1}$$

Доказательство: 3.1 следует из элементарного линейно-алгебраического вычисления. По определению, $\omega_J = \frac{1}{2}(\Omega+\overline{\Omega})$, и $\omega_K = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Omega-\overline{\Omega})$, Следовательно

$$\int_X \omega_J^d = \frac{1}{2^d} \sum_i \binom{d}{i} \int_X \Omega^i \wedge \overline{\Omega}^{d-i}$$

Поскольку X комплексно аналитично, $\int_X \eta = 0$ для каждой (p,q)-формы η, если $p \neq q$. Следовательно,

$$\int_X \omega_J^d = \frac{1}{2^d} \binom{d}{\frac{1}{2}d} \int_X \Omega^{\frac{d}{2}} \wedge \overline{\Omega}^{\frac{d}{2}}.$$

Второе равенство доказывается аналогично. ∎

Рассмотрим естественное действие группы унитарных кватернионов $SU(2)$ на дифференциальных формах на M. Легко видеть, что $SU(2)$ коммутирует с оператором Лапласа, а следовательно, действует на когомологиях M ([V0]). Поскольку $SU(2)$ действует транзитивно на сфере S^2 индуцированных комплексных структур, I, J, K сопряжены относительно естественного действия $SU(2)$. Следовательно, формы ω_I, ω_J, ω_K также сопряжены. Поскольку $SU(2)$ сохраняет умножение в когомологиях, формы $\omega_I^{\dim_{\mathbb{C}} M}$, $\omega_I^{\dim_{\mathbb{C}} M}$ i $\omega_I^{\dim_{\mathbb{C}} M}$ тоже сопряжены, и мы имеем

$$\int_M \omega_I^{\dim_{\mathbb{C}} M} = \int_M \omega_J^{\dim_{\mathbb{C}} M} = \int_M \omega_K^{\dim_{\mathbb{C}} M}.$$

Из Леммы 3.1 мы получаем

$$\int_M \omega_K^{\dim_{\mathbb{C}} M} = \int_M \omega_J^{\dim_{\mathbb{C}} M} = \binom{\dim_{\mathbb{C}} M}{\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} M} \int_M \left(\frac{\Omega \wedge \overline{\Omega}}{2}\right)^{\frac{\dim_{\mathbb{C}} M}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int_M \omega^{\dim_{\mathbb{C}} M} = \binom{\dim_{\mathbb{C}} M}{\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} M} \int_M \left(\frac{\Omega\wedge\overline{\Omega}}{2}\right)^{\frac{\dim_{\mathbb{C}} M}{2}}.$$

Тот же самый аргумент, примененный к трианалитическому подмногообразию $X\subset M$, влечет

$$\int_X \omega^{\dim_{\mathbb{C}} X} = \binom{\dim_{\mathbb{C}} X}{\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} X} \int_X \left(\frac{\Omega\wedge\overline{\Omega}}{2}\right)^{\frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{2}}. \qquad (3.2)$$

Для произвольного комплексного четномерного подмногообразия $X\subset M$, рассмотрим числа

$$\deg_\omega X := \int_X \omega^{\dim_{\mathbb{C}} X}$$

и

$$\deg_\Omega X := \binom{\dim_{\mathbb{C}} X}{\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} X} \int_X \left(\frac{\Omega\wedge\overline{\Omega}}{4}\right)^{\frac{\dim_{\mathbb{C}} X}{2}}$$

Определение 3.2: Числе $\deg_\omega X$ называется **кэлерова степень** X, а $\deg_\Omega X$ называется **симплектическая степень** X.

Замечание 3.3: Как следует из (3.2) , для трианалитических многообразий эти числа равны.

Замечание 3.4: Легко видеть, что

$$\deg_\omega X = (\dim_{\mathbb{C}} X)!\,\mathrm{Vol}(X),$$

где $\mathrm{Vol}(X)$ обозначает объем X, взятый по отношению к римановой структуре на X.

Следующее фундаментальное неравенство лежит в основе всех манипуляций с трианалитическими подмногообразиями. Его кэлерова версия, неравенство Виртингера, хорошо известно в литературе (см. напр. [Sto]).

Предложение 3.5: Пусть M - компактное комплексное многообразие, снабженное гиперкэлеровой структурой, а $X\subset M$ замкнутое комплексное подмногообразие четной размерности d. Тогда имеет место следующее неравенство

$$\deg_\omega X \geqslant |\deg_\Omega X|. \qquad (3.3)$$

Более того, неравенство (3.3) строгое, если X не трианалитично.

Доказательство: Мы следуем [V1], где тот же самый аргумент был использован для доказательства похожего утверждения. Пусть $\deg_{\omega_J} X$ обозначает интеграл

$$\int_X \omega_J^{\dim_{\mathbb{C}} X}.$$

В силу Леммы 3.1,

$$\deg_\Omega X = \deg_{\omega_J} X.$$

Следовательно, (3.3) можно записать как

$$|\deg_{\omega_J} X| \leqslant \deg_\omega X.$$

Легко видеть, что

$$\deg_\omega X = 2^d \operatorname{Vol}(X)$$

(см. Замечание 3.4). Классическое неравенство Виртингера ([Sto], стр. 7) влечет

$$|\deg_{\omega_J} X| \leqslant d! \operatorname{Vol}(X),$$

и равенство достигается только если подмножество $X \subset M$ комплексно аналитично по отношению к J. Это доказывает (3.3). Наконец, если (3.3) строго, то X комплексно аналитично по отношению к I и J. Легко видеть, что такие подмногообразия трианалитичны ([V1]). ∎

Определение 3.6: В предположениях Предложения 3.5, мы определяем **число Виртингера** $W(X)$ подмногообразия $X \subset M$ как

$$W(X) := \sqrt[d]{\frac{|\deg_\Omega(X)|}{\deg_\omega(X)}}. \tag{3.4}$$

Из Предложения 3.5 немедленно следует $W(X) \leqslant 1$, и это неравенство строгое, если X не трианалитично.

Замечание 3.7: Можно использовать (3.4) чтобы определить число Виртингера для любого компактного голоморфно симплектического кэлерова многообразия.

4 Числа Виртингера и симплектические иммерсии

Пусть M - комплексное многообразие. Мы говорим, что M **голоморфно симплектично**, если M снабжено нигде не вырожденной голоморфной симплектической формой Ω_M.

Определение 4.1: Пусть $\varphi : X \hookrightarrow M$ иммерсия голоморфно симплектических многообразий. Отображение φ называется **голоморфно симплектической иммерсией** если $\varphi^*\Omega_M = \Omega_X$.

Числа Витрингера, определенние в Секции 3, дают интересный инвариант голоморфно симплектических многообразий.

Теорема 4.2: Пусть

$$X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow ... \hookrightarrow X_n \tag{4.1}$$

последовательность голоморфно симплектических иммерсий компактных кэлеровых многообразий, $\dim X_1 > 0$. Предположим, что все иммерсии (4.1) согласованы с кэлеровой структурой. Предположим также, что для всех $i > 1$, многообразие X_i просто (в смысле определения, данного в Секции 2). Пусть $W(X_i)$ - виртингеровы числа многообразий X_i (Замечание 3.7). Тогда

$$W(X_1) \leqslant W(X_2) \leqslant ... \leqslant W(X_n).$$

Следствие 4.3: Пусть M компактное гиперкэлерово многообразие, $X \subset M$ голоморфно симплектическое подмногообразие, которое просто. Предположим, что X содержит подмногообразие $Y \subset X$, $\dim X > \dim Y > 0$, которое трианалитично в M. Тогда X тоже трианалитично.

Доказательство: В силу Предложения 3.5, мы имеем $W(Y) = W(M)$. Теорема 4.2 влечет $W(Y) \leqslant W(X) \leqslant W(M)$. Следовательно, $W(Y) = W(X) = W(M)$. Применяя опять Предложение 3.5 мы получаем, что X трианалитично. ∎

Доказательство Теоремы 4.2: Пусть $X_1 \hookrightarrow X_2$ голоморфно симплектическая иммерсия. Для доказательства Теоремы 4.2, нам достаточно доказать $W(X_1) \leqslant W(X_2)$. Из определения чисел Виртингера

немедленно следует
$$\deg_\Omega X_2 = \deg_{\omega'} X_2, \tag{4.2}$$
где ω' это кэлерова форма на X_2 заданная $\omega' = W(X_2)\omega$.

В силу Предложения 2.7, из равенства (4.2) следует существование гиперкэлеровой структуры на X_2, такой, что $[\omega']$ ее кэлеров класс, а Ω - ее голоморфно симплектическая форма. Используя Предложение 3.5, мы получаем
$$|\deg_\Omega X_1| \leqslant \deg_{\omega'} X_1. \tag{4.3}$$
С другой стороны, по определению ω', мы имеем
$$\deg_{\omega'} X_1 = \deg_\omega X_1 \cdot W(X_2)^{\dim_{\mathbb{C}} X_1}. \tag{4.4}$$
Поделив обе стороны (4.3) на $\deg_\omega X_1$ и используя (4.4), мы получаем
$$W(X_2)^{\dim_{\mathbb{C}} X_1} \geqslant \frac{\deg_\Omega X_1}{\deg_\omega X_1} = W(X_1)^{\dim_{\mathbb{C}} X_1}$$
Мы доказали Теорему 4.2. ∎

Благодарности: Я признателен Диме Каледину и Саше Кузнецову за ценные замечания.

References

[Bea] Beauville, A. *Varietes Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle.* J. Diff. Geom. **18**, pp. 755-782 (1983).

[Bes] Besse, A., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York (1987) // перевод: Эйнштейновы Многообразия, Мир, Москва, 1990.

[Bo] Богомолов, Ф.А., *Гамильтоновы кэлеровы многообразия*, Доклады АН СССР **243**, 1101-1104 (1978).

[C] Calabi, E., *Metriques kählериennes et fibrès holomorphes*, Ann. Ecol. Norm. Sup. **12** (1979), 269-294.

[GH] Griffiths, Ph., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Intersience, New York, 1978.

[Sto] Stolzenberg, G. *Volumes, Limits and Extensions of Analytic Varieties,* Lect. Notes in Math. 19, 1966, Springer-Verlag.

[V0] M. Verbitsky, *О действии алгебры Ли* $\mathfrak{so}(5)$ *на когомологиях гиперкэлерова многообразия*, Функциональный анализ и его приложения, **24** (1990), 70-71.

[V1] Verbitsky M., *Hyperkähler embeddings and holomorphic symplectic geometry II,* alg-geom electronic preprint 9403006 (1994), 14 pages, LaTeX, also published in: GAFA **5** no. 1 (1995), 92-104.

[V2] Verbitsky M., *Trianalytic subvarieties of the Hilbert scheme of points on a K3 surface,* alg-geom/9705004, also published in: GAFA, Vol. 8 (1998) 732-782.

[V3] Verbitsky M., *Hypercomplex Varieties*, alg-geom/9703016 (1997), published in: Comm. Anal. Geom. **7** (1999), no. 2, 355–396.

[Y] Yau, S. T., *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I.* // Comm. on Pure and Appl. Math. 31, 339-411 (1978).