Теория Ходжа на приблизительно кэлеровых многообразиях

Михаил Вербицкий[1]

verbit@maths.gla.ac.uk, verbit@mccme.ru

Приблизительно кэлеровым многообразием называется трехмерное почти комплексное эрмитово многообразие (M, I, ω, Ω) со структурной группой, редуцированной к $SU(3)$, где Ω обозначает каноническую (3,0)-форму, а ω эрмитову (1,1)-форму, причем выполняются соотношения $d\omega = 3\lambda \operatorname{Re}\Omega$, $d \operatorname{Im}\Omega = -2\lambda\omega^2$, для ненулевой вещественной константы λ. Мы выводим аналог кэлеровых тождеств на M, получая попутно полезные соотношения между естественными операторами Лапласа на M. Когда M компактно, эти соотношения влекут сильные результаты о структуре когомологий M. Мы доказываем, что гармонические формы на M допускают разложение Ходжа, и группа $H^{p,q}(M)$ может быть ненулевой только если $p = q$ или $(p = 1, q = 2)$ или $(p = 2, q = 1)$.

Содержание

[1] Написано при поддержке гранта GR/R77773/01 от EPSRC

1 Введение

1.1 Приблизительно кэлеровы 6-многообразия

Приблизительно кэлеровы многообразия, ныне известные как многообразия Грэя ([MNS2]), были определены и изучались Альфредом Грэем ([Gr1], [Gr2], [Gr3], [Gr4]) в широком контексте теории слабых голономий и естественного кручения общих $U(n)$-структур. Почти комплексное эрмитово многообразие (M, I) называется **приблизительно кэлеровым**, если

$$\nabla_X(I)X = 0,$$

для каждого векторного поля X на M (здесь ∇ обозначает связность Леви-Чивита). Иначе говоря, тензор $\nabla\omega$, где ω обозначает эрмитову $(1,1)$-форму, должен быть тотально антисимметричным. Если к тому же $\nabla_X(\omega) \neq 0$ для любого ненулевого векторного поля X, многообразие M называется **строго приблизительно кэлерово**.

Используя глубокие результаты Кириченко и Клейтона-Суонна (см. [K], [CS]), П.-А. Надь в работе [N] доказал, что любое строго приблизительно кэлерово многообразие локально изоморфно произведению локально однородных пространств, строго приблизительно кэлеровых многообразий размерности 6, и пространств твисторов кватернионно-кэлеровых многообразий с положительной кривизной Риччи, снабженных метрикой Илза-Саламона ([ES]).

В современной математической литературе термин “приблизительно кэлерово” обыкновенно обозначает строго приблизительно кэлеровы 6-многообразия. В настощей статье мы будем следовать этой традиции, часто опуская “строго” и “6-мерное”.

Историю этого понятия, большое число эквивалентных определений и библиографию текущих работ в области можно найти в работах [MNS1] и [V3].

Для нас удобнее определять приблизительно кэлеровы 6-многообразия в терминах дифференциальных форм, следующим образом.

Предложение 1.1: Пусть дано эрмитово почти комплексное 6-многообразие (M, I, ω). Тогда следующие условия эквивалентны.

(i) Тензор $\nabla_X(I)Y$ кососимментричен по отношению к перестановкам векторных полей X, Y, и не равен нулю.

(ii) Форма $\nabla\omega \in \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2(M)$ ненулевая и тотально кососимметричная (иначе говоря, $\nabla\omega$ — 3-форма).[1]

(iii) Структурная группа M допускает редукцию к $SU(3)$; иначе говоря, на M задана (3,0)-форма Ω, удовлетворяющая $|\Omega| = 1$, и выполнено следующее

$$\begin{aligned} d\omega =& 3\lambda \operatorname{Re}\Omega, \\ d\operatorname{Im}\Omega =& -2\lambda\omega^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где λ — ненулевая вещественная константа.

Доказательство: Хорошо известно; см. напр. [V3]. ■

Определение 1.2: $SU(3)$-многообразие (M, ω, Ω, I) называется **приблизительно кэлеровым**, если выполнено уравнение (1.1).

1.2 Приблизительно кэлеровы многообразия в геометрии и физике

В работе [V3] было доказано, что если приблизительно кэлерово многообразие M не изометрично локально 6-мерной сфере, почти комплексная структура на M однозначно определяется метрикой. В [F] это было доказано и для S^6. Также в [V3] было показано, что метрика на M однозначно определяется почти комплексной структурой.

Обозначим за $C(M)$ риманов конус (M, g). По определению, риманов конус это произведение $\mathbb{R}^{>0} \times M$, снабженное метрикой $t^2g + dt^2$, где t обозначает единичный параметр в $\mathbb{R}^{>0}$

Определение приблизительно кэлеровых многообразий можно переформулировать в терминах римановой геометрии, следующим образом.

Предложение 1.3: Пусть (M, g) — риманово 6-многообразие. Тогда M допускает строго приблизительно кэлерову почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда выполнены следующие эквивалентные условия.

(i) M допускает ненулевой киллингов спинор (спинор ψ такой, что $\nabla_X\psi = \lambda X\cdot\psi$ для любого векторного поля $X \in TM$ и фиксированной, ненулевой константы λ).

(ii) Группа голономий $C(M)$ равна G_2.

Доказательство: Хорошо известно (см. напр. [Gru]). ■

[1] Отметим, что в этом случае из формулы Картана вытекает $d\omega = \nabla\omega$.

Подробное обсуждение геометрических аспектов теории киллинговых спиноров, в том числе их применения в 6-мерной геометрии, можно найти в книге [BFGK].

Из условия (i) понятно, что приблизительно кэлеровы многообразия являются эйнштейновыми; действительно, только эйнштейновы многообразия допускают киллинговы спиноры.

Приблизительно кэлеровы многообразия появляются как решения немалого числа важных классификационных задач: в классификации многообразий, допускающих киллинговы спиноры, в классификации конических особенностей G_2-многообразий, в классификации многообразий, допускающих связность с тотально антисимметричным и параллельным тензором кручения ([CS]) и так далее. Эти многообразия играют еще более важную роль в физике, будучи решениями струнных теорий класса II B ([FI]). В этом смысле, приблизительно кэлеровы многообразия не менее важны, чем привычные многообразия Калаби-Яу.

Конические особенности G_2-многообразий, проявляющиеся как конуса приблизительно кэлеровых многообразий, имеют приложения в струнной физике, ибо через них выражаются решения уравнений супергравитации, являющихся произведениями пространств анти-деситтеровского типа и эйнштейновых решений (см. напр. [AFHS]). В последние годы, конические особенности G_2-многообразий, возникающие в приблизительно кэлеровой геометрии, были использованы для получения струнных моделей с хиральной материей ([AtW], [AcW]).

1.3 Локальная структура приблизительно кэлеровых 6-многообразий

Пусть задано приблизительно кэлерово многообразие (M, I, ω, Ω). Поскольку $d\omega = 3\lambda \operatorname{Re}\Omega$, комплексная структура на M неинтегрируема; в самом деле, дифференциал $(1,1)$-формы ω лежит в $\Lambda^{3,0}(M) \oplus \Lambda^{0,3}(M)$, а это невозможно, если (M, I) интегрируемо.

Препятствие к интегрируемости почти комплексной структуры задается так называемым тензором Ниенхойса,

$$N^* : T^{1,0}(M) \otimes T^{1,0}(M) \longrightarrow T^{0,1}(M),$$

отображающим пару (1,0)-векторных полей в (0,1)-часть их коммутатора. Для наших целей, удобнее оперировать двойственным тензором:

$$N : \Lambda^{0,1}(M) \longrightarrow \Lambda^{2,0}(M). \tag{1.2}$$

Из формулы Картана ясно, что N равно $(2,-1)$-части дифференциала де Рама. С другой стороны, можно выразить N через ∇I, обычным образом:

$$N^*(X,Y) = (\nabla_X I)Y - (\nabla_Y I)X$$

где X, Y — $(1,0)$-векторные поля. На приблизительно кэлеровом многообразии, $\nabla(I)$ может быть выражено посредством 3-формы $d\omega = \nabla\omega$. Это дает

следующее соотношение:

$$N^*(X,Y) = d\omega(X,Y,\cdot)^\sharp, \tag{1.3}$$

где $d\omega(X,Y,\cdot)^\sharp$ — векторное поле, двойственное 1-форме $d\omega(X,Y,\cdot)$. Поскольку $d\omega = 3\lambda \operatorname{Re}\Omega$, соотношение (1.3) позволяет выразить N через Ω и ω.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Lambda^{1,0}(M)$ - ортонормальный репер в кокасательном пространстве, такой, что $\Omega = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3$. Уравнение (1.3) дает

$$N(\overline{\xi}_1) = \lambda\xi_2 \wedge \xi_3, \quad N(\overline{\xi}_2) = -\lambda\xi_1 \wedge \xi_3, \quad N(\overline{\xi}_3) = \lambda\xi_1 \wedge \xi_2, \tag{1.4}$$

Это вычисление хорошо известно; его детальное изложение можно найти в работе [V3].

1.4 Разложение Ходжа дифференциала де Рама и естественные операторы Лапласа

Результаты этой статьи можно вкратце пересказать так. Пусть

$$d = d^{2,-1} + d^{1,0} + d^{0,1} + d^{-1,2},$$

компоненты разложения Ходжа дифференциала де Рама (см. раздел 2.1). Мы используем следующие обозначения: $d^{2,-1} =: N$, $d^{-1,2} =: \overline{N}$, $d^{1,0} =: \partial$, $d^{0,1} =: \overline{\partial}$.

Обычные кэлеровы тождества имеют форму "коммутатор компоненты разложения Ходжа дифференциала де Рама с оператором Ходжа Λ пропорционален эрмитово-сопряженному к другой компоненте дифференциала де Рама". Мы выводим аналогичный набор соотношений для приблизительно кэлеровых многообразий (Теорема 2.1, Предложение 4.1). Эти соотношения используются для изучения различных естественных операторов Лапласа на приблизительно кэлеровых многообразиях. Мы доказываем, что разность

$$\Delta_\partial - \Delta_{\overline{\partial}} = R \tag{1.5}$$

это скалярный оператор, действующий на (p,q)-формах как $\lambda^2(p-q)(3-p-q)$ (см. Следствие 2.3). Для лапласиана де Рама $\Delta_d = dd^* + d^*d$, имеет место следующая формула:

$$\Delta_d = \Delta_{\partial-\overline{\partial}} + \Delta_N + \Delta_{\overline{N}} \tag{1.6}$$

(см. (4.6)). Эта формула используется, чтобы описать гармонические формы на компактном приблизительно кэлеровом многообразии M. Мы доказываем, что η гармонична тогда и только тогда, когда все компоненты разложения Ходжа операторов d и d^* зануляются на η (Теорема 5.2). Из этого следует, что гармонические формы на M допускают разложение Ходжа:

$$\mathcal{H}^*(M) = \bigoplus \mathcal{H}^{p,q}(M).$$

Используя формулу (1.5), мы получаем, что $\mathcal{H}^{p,q}(M) = 0$ если не выполнено $p = q$, либо $(q = 2, p = 1)$, либо $(q = 1, p = 2)$. Мы также доказываем, что все гармонические формы $\eta \in \mathcal{H}^{p,q}(M)$, для $(q = 2, p = 1)$, $(q = 1, p = 2)$ или $p = q = 2$ **коприимитивны**, то есть удовлетворяют $\eta \wedge \omega = 0$, где ω - эрмитова форма M (см. Замечание 5.4).

2 Кэлеровы соотношения на приблизительно кэлеровых многообразиях

2.1 Операторы $\partial, \overline{\partial}$ на почти комплексных многообразиях

Пусть дано почти комплексное многообразие (M, I), а

$$d: \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M)$$

— его дифференциал де Рама. Разложение Ходжа дает

$$d = \bigoplus_{i+j=1} d^{i,j}, \quad d^{i,j}: \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+i,q+j}(M) \tag{2.1}$$

Используя соотношение Лейбница, мы видим, что каждая из компонент разложения Ходжа однозначно определяется значениями, которые она принимает на пространствах $\Lambda^0(M)$, $\Lambda^1(M)$, порождающих алгебру де Рама. На $\Lambda^0(M)$, только $d^{1,0}$, $d^{0,1}$, а на $\Lambda^1(M)$ только $d^{2,-1}, d^{1,0}, d^{0,1}, d^{-1,2}$ могут быть ненулевыми Следовательно, только 4 компоненты разложения (2.1) могут быть не равны нулю:

$$d = d^{2,-1} + d^{1,0} + d^{0,1} + d^{-1,2},$$

Поскольку $N := d^{2,-1}$, $\overline{N} := d^{-1,2}$ зануляются на $\Lambda^0(M)$, эти компоненты $C^\infty(M)$-линейны. На самом деле,

$$N: \Lambda^{0,1}(M) \longrightarrow \Lambda^{2,0}(M)$$

это тензор Ниенхойса (1.2) многообразия (M, I), продолженный на все пространство $\Lambda^*(M)$ посредством правила Лейбница. Мы обозначаем $d^{1,0}$ как $\partial: \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q}(M)$, а $d^{0,1}$ как $\overline{\partial}: \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}(M)$. Разлагая уравнение $d^2 = 0$ по компонентам, мы получаем

$$\begin{aligned} N^2 + \{N, \partial\} + &(\{\overline{\partial}, N\} + \partial^2) + (\{N, \overline{N}\} + \{\partial, \overline{\partial}\}) \\ &+ (\{\partial, \overline{N}\} + \overline{\partial}^2) + \{\overline{N}, \overline{\partial}\} + \overline{N}^2 \\ &= d^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает суперкоммутатор. Члены в скобках в уравнении (2.2) это разные компоненты разложения Ходжа d^2, но поскольку $d^2 = 0$, все эти компоненты зануляются:

$$\begin{aligned} N^2 = &\{N, \partial\} = \{\overline{\partial}, N\} + \partial^2 = \\ = &\{N, \overline{N}\} + \{\partial, \overline{\partial}\} = \{\partial, \overline{N}\} + \overline{\partial}^2 \\ = &\{\overline{N}, \overline{\partial}\} = \overline{N}^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Операторы ∂^2 и $\overline{\partial}^2$ могут быть ненулевыми.

Следующая почти комплексная версия кэлеровых соотношений понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 2.1: Пусть дано почти комплексное эрмитово многообразие (M, I), $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ его эрмитова форма, а $\Lambda_\omega : \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i-2}(M)$ - сопряженный оператор к $L_\omega(\eta) = \omega \wedge \eta$. Рассмотрим операторы

$$\partial, \overline{\partial} : \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M),$$

определенные выше, и обозначим за $\partial^*, \overline{\partial}^* : \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i-1}(M)$ их сопряженные операторы. Предположим, что $d\omega \in \Lambda^{3,0}(M) \oplus \Lambda^{0,3}(M)$, или, что то же самое, $\partial\omega = \overline{\partial}\omega = 0$. Тогда

$$[\Lambda_\omega, \partial] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}^*, \quad [\Lambda_\omega, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\,\partial^* \tag{2.4}$$

и

$$[L_\omega, \partial^*] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}, \quad [\Lambda_\omega, \partial] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}^* \tag{2.5}$$

Доказательство: Чтобы доказать Теорему 2.1, используется аргумент, который доказывает обычные кэлеровы тождества в ситуации, когда невозможно воспользоваться координатами. Таким образом выводятся кэлеровы соотношения для гиперкэлеровых многообразий с кручением, полученные в работе [V1], и кэлеровы соотношения для локально конформно гиперкэлеровых многообразий в работе [V2].

Соотношения (2.4) и (2.5) эрмитово сопряжены, а следовательно, эквивалентны. Тождества (2.5) получаются одно из другого комплексным сопряжением, поэтому они тоже эквивалентны. Чтобы доказать Теорему 2.1, достаточно проверить только одно из этих соотношений, например это

$$[L_\omega, \partial^*] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}. \tag{2.6}$$

Доказательство подобного соотношения следует общей модели, которая детально излагается в [V1] и [V2], а также в Приложении к настоящей статье. Существует алгебраическое понятие дифференциального оператора на градуированной суперкоммутативной алгебре, определенное Гротендиком (Определение 6.1). В смысле этого определения, ∂^*, $\overline{\partial}^*$ операторы второго порядка на алгебре $\Lambda^*(M)$ (Предложение 6.8), а оператор L_ω $\Lambda^*(M)$-линейный (нулевого порядка). Следовательно, $[L_\omega, \partial^*]$ (будучи коммутатором алгебраических дифференциальных операторов 0-го и 2-го порядка на $\Lambda^*(M)$) — алгебраический дифференциальный оператор первого порядка. Оператор $\sqrt{-1}\,\overline{\partial}$ также имеет порядок 1, ибо удовлетворяет правилу Лейбница. Чтобы доказать линейное соотношение между операторами первого порядка на алгебре, такое, как (2.6), достаточно проверить его на любом наборе мультипликативных образующих (Замечание 6.4). Чтобы доказать Теорему 2.1, остается убедиться, что (2.6) выполнено на некотором наборе образующих, например, на 1-формах и 0-формах.

Для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ имеет место уравнение

$$[L_\omega, \partial^*]f = -\partial^*(f\omega). \tag{2.7}$$

С другой стороны, $\partial^* = -*\partial*$ и $*(f\omega) = \overline{f}\omega^{n-1}$, где $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Следовательно,

$$[L_\omega, \partial^*]f = *(\partial\overline{f} \wedge \omega^{n-1}) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}f$$

поскольку для каждой $(1,0)$-формы η мы имеем $*(\eta \wedge \omega^{n-1}) = \sqrt{-1}\,\overline{\eta}$, и $\overline{\partial\overline{f}} = \overline{\partial}f$. Это доказывает, что соотношение (2.6) выполняется на функциях (0-формах).

Легко убедиться, что ∂^*-замкнутые 1-формы порождают расслоение 1-форм над $C^\infty(M)$. Действительно, на 2-формах мы имеем $(\partial^*)^2 = 0$, и, следовательно, все ∂^*-точные 1-формы ∂^*-замкнуты. Локальным вычислением легко убедиться, что $\partial^*(\Lambda^2(M))$ порождает $\Lambda^1(M)$ над $C^\infty(M)$.

Рассмотрим 1-форму $\eta \in \Lambda^1(M)$. Чтобы доказать Теорему 2.1, остается продемонстрировать, что $[L_\omega, \partial^*](\eta) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\eta$. Поскольку ∂^*-замкнутые 1-формы порождают $\Lambda^*(M)$, мы можем считать, что η ∂^*-замкнута. В этом случае

$$\begin{aligned}[L_\omega, \partial^*](\eta) &= -\,\partial^* L_\omega \eta = *\partial * (\omega \wedge \eta) \\ &= *\,\partial(\omega^{n-2} \wedge I(\overline{\eta})) = *(\omega^{n-2} \wedge \partial(I\overline{\eta})).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Поскольку η ∂^*-замкнута, мы имеем $\omega^{n-1} \wedge \partial(I\overline{\eta}) = 0$, и поэтому форма $\omega^{n-2} \wedge \partial\eta$ копримитивна (удовлетворяет $(\omega^{n-2} \wedge \partial\eta) \wedge \omega = 0$). Для любой копримитивной $(2n-2)$-формы $\alpha = \kappa \wedge \omega^{n-2}$, форма $*\alpha$ может быть записана явно в терминах κ: $*\alpha = -I(\overline{\kappa})$. Следовательно,

$$*(\omega^{n-2} \wedge \partial I(\overline{\eta})) = -\overline{I\partial I\overline{\eta}} = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\eta.$$

Сравнивая это с (2.8), мы убеждаемся, что

$$[L_\omega, \partial^*](\eta) = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\eta$$

Мы доказали Теорему 2.1. ■

2.2 Квадрат оператора Ниенхойса

В дальнейшем, нам понадобится следующее полезное тождество.

Предложение 2.2: Пусть (M, I, ω, Ω) — приблизительно кэлерово 6-многообразие, $d\omega = \lambda \operatorname{Re}\Omega$, а

$$C := N + \overline{N} = d^{2,-1} + d^{-1,2}$$

— $(2,-1)\oplus(-1,2)$-часть дифференциала де Рама. Тогда следующие $C^\infty(M)$-линейные отображения

$$\Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q+1}(M)$$

равны:

(i) C^2

(ii) $-\{\partial, \overline{\partial}\}$ (где $\{\cdot,\cdot\}$ обозначает суперкоммутатор).

(iii) скалярный оператор $\sqrt{-1}\,\lambda^2(p-q)L_\omega$, отображающий $\eta \in \Lambda^{p,q}(M)$ в

$$\sqrt{-1}\,\lambda^2(p-q)\eta\wedge\omega.$$

Доказательство: Равенство $C^2 = -\{\partial, \overline{\partial}\}$ очевидно, потому что $(1,1)$-часть d^2 равна $C^2 + \{\partial, \overline{\partial}\}$, а $d^2 = 0$ (см. (2.2)). Чтобы доказать уравнение

$$C^2 = \sqrt{-1}\,\lambda^2(p-q)L_\omega, \tag{2.9}$$

мы замечаем, что обе части уравнения (2.9) — дифференцирования (C^2 является дифференцированием, поскольку это антикоммутатор нечетного дифференцирования с собой). Поэтому достаточно проверить тождество (2.9) на образующих алгебры $\Lambda^*(M)$, например на $\Lambda^0(M)$ и $\Lambda^1(M)$. На $\Lambda^0(M)$, и C и $(p-q)$ зануляются, и соотношение (2.9) очевидно. Проверим (2.9) на $\Lambda^{1,0}(M)$ (доказательство тождества (2.9) на $\Lambda^{0,1}(M)$ получается аналогично). Выберем ортонормальный базис $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Lambda^{1,0}(M)$, таким образом, что

$$\omega = -\sqrt{-1}\,(\xi_1\wedge\overline{\xi}_1 + \xi_2\wedge\overline{\xi}_2 + \xi_3\wedge\overline{\xi}_3), \quad \Omega = \xi_1\wedge\xi_2\wedge\xi_3$$

Пусть η — $(0,1)$-форма, скажем, $\eta = \overline{\xi}_1$ (это предположение не ограничительно, поскольку обе стороны уравнения (2.9) по определению $C^\infty(M)$-линейны). Тогда $N(\eta) = \lambda\xi_2\wedge\xi_3$, как следует из уравнений (1.4). Подобным образом, правило Лейбница и уравнение (1.4) дают

$$\overline{N}N(\eta) = \lambda^2(\overline{\xi}_1\wedge\overline{\xi}_3\wedge\xi_3 + \xi_1\wedge\overline{\xi}_1\wedge\overline{\xi}_2) = \sqrt{-1}\,\lambda^2\eta\wedge\omega. \tag{2.10}$$

С другой стороны,

$$C^2(\eta) = (N+\overline{N})^2\eta = \overline{N}N(\eta), \tag{2.11}$$

поскольку $\overline{N}\eta = 0$ (это форма ходжева типа $(-1,3)$), а $N^2 = \overline{N}^2 = 0$, как следует из (2.2). Комбинируя (2.10) и (2.11), мы получаем (2.9). Предложение 2.2 доказано. ■

Следствие 2.3: Пусть (M, I, ω, Ω) — приблизительно кэлерово 6-многообразие, $d\omega = \lambda\operatorname{Re}\Omega$, и $\partial, \overline{\partial}$ — $(1,0)$- и $(0,1)$-части дифференциала де Рама. Рассмотрим соответствующие операторы Лапласа:

$$\Delta_\partial := \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}.$$

Тогда $\Delta_\partial - \Delta_{\overline{\partial}} = R$, где R — скалярный оператор, действующий на (p,q)-формах умножением на $\lambda^2(3-p-q)(p-q)$.

Доказательство: Как следует из Предложения 2.2, $\{\partial, \overline{\partial}\} = \sqrt{-1}\,(p-q)L_\omega$. Хорошо известно, что оператор $H := [L_\omega, \Lambda_\omega]$ действует на (p,q)-формах как умножение на $(3-p-q)$ (см. напр. [GH]). Поэтому

$$\{\Lambda_\omega, \{\partial, \overline{\partial}\}\} = \sqrt{-1}\,R. \tag{2.12}$$

Применяя суперкоммутативную версию тождества Якоби и Теорему 2.1 к (2.12), мы получаем

$$\sqrt{-1}\, R = \{\Lambda_\omega, \{\partial, \overline{\partial}\}\} = \{\{\Lambda_\omega, \partial\}, \overline{\partial}\} + \{\partial, \{\Lambda_\omega, \overline{\partial}\}\} = \sqrt{-1}\, \Delta_\partial - \sqrt{-1}\, \Delta_{\overline{\partial}}. \tag{2.13}$$

Это доказывает Следствие 2.3. ■

3 Лапласиан де Рама и Δ_∂, $\Delta_{\overline{\partial}}$, $\Delta_{\partial-\overline{\partial}}$

3.1 Выражение для Δ_d

Пусть M — приблизительно кэлерово 6-многообразие, $d = N + \partial + \overline{\partial} + \overline{N}$ разложение Ходжа для дифференциала де Рама, а Δ_∂, $\Delta_{\overline{\partial}}$ — операторы Лапласа определенные выше, $\Delta_\partial := \{\partial, \partial^*\}$, $\Delta_{\overline{\partial}} := \{\overline{\partial}, \overline{\partial}^*\}$. Рассмотрим обычный лапласиан на дифференциальных формах, $\Delta_d = \{d, d^*\}$. В дополнение к Следствию 2.3, мы получим следующие соотношения между этими операторами.

Теорема 3.1: Пусть M — приблизительно кэлерово 6-многообразие, а Δ_∂, $\Delta_{\overline{\partial}}$, Δ_d — операторы Лапласа, определенные выше. Тогда

$$\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} + \Delta_{N+\overline{N}} - \{\partial, \overline{\partial}^*\} - \{\overline{\partial}, \partial^*\}. \tag{3.1}$$

где оператор $\Delta_{N+\overline{N}}$ определяется как суперкоммутатор C^∞-линейного оператора $C := N + \overline{N}$ и его сопряженного:

$$\Delta_{N+\overline{N}} := CC^* + C^*C.$$

Доказательство теоремы 3.1 занимает остаток секции 3.

3.2 $N = \lambda[L_\Omega, \Lambda_\omega]$

Следующие линейно-алгебраические соотношения используются в доказательстве Теоремы 3.1.

Утверждение 3.2: Пусть (M, I, ω, Ω) — приблизительно кэлерово 6--многообразие, $d\omega = \lambda \operatorname{Re}\Omega$, N — $(2,-1)$-часть дифференциала де Рама, а Λ_ω — оператор Ходжа, определенный выше. Тогда

$$\lambda[L_\Omega, \Lambda_\omega] = N, \tag{3.2}$$

где $L_\Omega(\eta) := \Omega \wedge \eta$.

Доказательство: Как делается в доказательстве Теоремы 2.1, мы рассматриваем L_Ω, Λ_ω как алгебраические дифференциальные операторы на градуированной суперкоммутативной алгебре $\Lambda^*(M)$ (см. Определение 6.1). В этом смысле, L_Ω является оператором нулевого порядка, а Λ_ω — оператор второго порядка, что следует из Утверждения 6.7. Поэтому коммутатор $[L_\Omega, \Lambda_\omega]$ — оператор

первого порядка. В силу Замечания 6.4, достаточно проверить (3.2) на 0-формах и 1-формах. Это делается явным подсчетом в координатах, заданных уравнением (1.4). ■

3.3 Коммутационные соотношения для N, $\overline{N}$, ∂, $\overline{\partial}$

Мы выводим коммутационные соотношения, аналогичные коммутационным соотношениям Кэлера и Кодаиры.

Предложение 3.3: В обозначениях Теоремы 3.1, следующие антикоммутаторы зануляются.

$$\{N^*, \overline{\partial}\} = \{\overline{N}^*, \partial\} = \{N, \overline{\partial}^*\} = \{\overline{N}, \partial^*\} = 0. \tag{3.3}$$

Более того,

$$\begin{aligned} \{\overline{\partial}^*, \partial\} &= -\{N, \partial^*\} = -\{\overline{N}^*, \overline{\partial}\}, \\ \{\partial^*, \overline{\partial}\} &= -\{\overline{N}, \overline{\partial}^*\} = -\{N^*, \partial^*\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

Доказательство: Очевидно, что все соотношения (3.3) могут быть полученны применением эрмитова и комплексного сопряжения к следующему соотношению:

$$\{N^*, \overline{\partial}\} = 0. \tag{3.5}$$

Разлагая $d^2 = 0$ на ходжевы компоненты, мы получаем $\{N, \partial\} = 0$ (см. (2.3)). Из Утверждения 3.2 следует, что это эквивалентно

$$\{\{L_\Omega, \Lambda_\omega\}, \partial\} = 0. \tag{3.6}$$

Очевидно $\partial\Omega = 0$, а следовательно,

$$\{L_\Omega, \partial\} = 0. \tag{3.7}$$

Применяя суперкоммутативный аналог тождества Якоби к уравнению (3.6) и используя (3.7), мы получаем

$$0 = \{L_\Omega, \{\Lambda_\omega, \partial\}\} = \sqrt{-1}\,\{L_\Omega, \overline{\partial}^*\}. \tag{3.8}$$

Действуя на (3.8) посредством $\{\Lambda_\omega, \cdot\}$ и снова используя супер-аналог тождества Якоби, получаем

$$0 = \{\Lambda_\omega, \{L_\Omega, \overline{\partial}^*\}\} = -\lambda\{N, \overline{\partial}^*\}.$$

Это доказывает (3.5) и (3.3).

Остается доказать тождество (3.4). Применяя разложение Ходжа к $d^2 = 0$ мы получаем

$$\frac{1}{2}\{\partial, \partial\} + \{N, \overline{\partial}\} = 0 \tag{3.9}$$

(см. (2.3)). Применяя аргумент, который мы использовали, чтобы получить (3.7), находим также

$$\begin{aligned}\{N,\overline{\partial}\} =& -\lambda^{-1}\{\{\Lambda_\omega, L_\Omega\},\overline{\partial}\}\\ =&\lambda^{-1}\{\{L_\Omega,\{\Lambda_\omega,\overline{\partial}\}\} - \lambda^{-1}\{\Lambda_\omega,\{L_\Omega,\overline{\partial}\}\}\\ =& -\sqrt{-1}\,\lambda^{-1}\{L_\Omega,\partial^*\}.\end{aligned}$$

Вместе с (3.9), это дает

$$\frac{1}{2}\{\partial,\partial\} = \sqrt{-1}\,\lambda^{-1}\{L_\Omega,\partial^*\}. \tag{3.10}$$

Действуя на (3.10) посредством $\{\Lambda_\omega,\cdot\}$, получаем

$$\sqrt{-1}\,\{\partial,\overline{\partial}^*\} = \sqrt{-1}\,\lambda^{-1}\{\{\Lambda_\omega,L_\Omega\},\partial^*\} = -\sqrt{-1}\,\{N,\partial^*\}.$$

Мы получили первое тождество из (3.4):

$$\{\partial,\overline{\partial}^*\} = -\{N,\partial^*\}. \tag{3.11}$$

Остальные тождества (3.4) получаются из (3.11) эрмитовым и комплексным сопряжением. Мы доказали Предложение 3.3. ■

3.4 Разложение Ходжа для оператора Лапласа

Теперь мы можем закончить доказательство Теоремы 3.1. Разлагая d, d^* на их ходжевы компоненты, получаем

$$\begin{aligned}\Delta_d =&\Big(\{N^*,\overline{\partial}\} + \{N,\overline{\partial}^*\} + \{\overline{N}^*,\partial\} + \{\overline{N},\partial^*\}\Big)\\ &+\Big(\{\partial^*,\overline{\partial}\} + \{\overline{\partial}^*,\partial\} + \{N,\partial^*\} + \{\overline{N},\overline{\partial}^*\} + \{N^*,\partial\} + \{\overline{N}^*,\overline{\partial}\}\Big)\\ &+\Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} + \Delta_{N+\overline{N}}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Первый член в скобках равен нулю в силу уравнения (3.3), второй же равен $-\{\partial,\overline{\partial}^*\} - \{\overline{\partial},\partial^*\}$, как следует из (3.4). Получаем

$$\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} + \Delta_{N+\overline{N}} - \{\partial,\overline{\partial}^*\} - \{\overline{\partial},\partial^*\}. \tag{3.13}$$

Мы доказали Теорему 3.1. ■

Уравнение (3.13) может быть переписано как следующее соотношение между операторами Лапласа.

Следствие 3.4: В обозначениях Теоремы 3.1, обозначим за $\Delta_{\partial-\overline{\partial}}$ лапласиан $\{\partial-\overline{\partial},\partial^*-\overline{\partial}^*\}$. Тогда

$$\Delta_d = \Delta_{\partial-\overline{\partial}} + \Delta_{N+\overline{N}}. \tag{3.14}$$

Доказательство: Как ясно из уравнения (3.13), для доказательства (3.14) достаточно убедиться, что

$$\Delta_{\partial-\overline{\partial}} = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} - \{\partial, \overline{\partial}^*\} - \{\overline{\partial}, \partial^*\}$$

Это тождество получается раскрытием скобок. ■

4 Кэлеровы тождества для N, $\overline{N}$

В дальнейшем, нам понадобятся следующие уравнения, аналогичные кэлеровым тождествам (Теорема 2.1), но для $C^\infty(M)$-линейной "внешней" части дифференциала де Рама, N и $\overline{N}$.

Предложение 4.1: Пусть (M, I, ω, Ω) — приблизительно кэлерово 6--многообразие, N, $\overline{N}$ — $(2,-1)$- и $(-1,2)$-части дифференциала де Рама, N^*, $\overline{N}^*$ их эрмитово сопряженные, а Λ_ω эрмитово сопряженный оператор к $L_\omega(\eta) := \omega \wedge \eta$. Тогда

$$\begin{aligned} [\Lambda_\omega, N^*] &= 2\sqrt{-1}\,\overline{N}, \quad [\Lambda_\omega, \overline{N}^*] = -2\sqrt{-1}\,N. \\ [L_\omega, N] &= 2\sqrt{-1}\,\overline{N}^*, \quad [L_\omega, \overline{N}] = -2\sqrt{-1}\,N^*. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Доказательство: Тождества (4.1) получаются одно из другого посредством комплексного и эрмитова сопряжения, поэтому они эквивалентны. Таким образом, достаточно доказать

$$[L_\omega, N^*] = 2\sqrt{-1}\,\overline{N}. \tag{4.2}$$

Доказательство этой формулы следует тем же принципам, как и доказательство Теоремы 2.1. Снова, обе стороны уравнения (4.2) — алгебраические дифференциальные операторы первого порядка на алгебре $\Lambda^*(M)$, в смысле Гротендика (Определение 6.1). Поэтому достаточно проверить, что (4.2) выполняется на 0-формах и 1-формах (Замечание 6.4). На 0-формах, обе стороны (4.2) очевидно зануляются. Чтобы доказать (4.2), остается проверить

$$N^* L_\omega(\eta) = 2\sqrt{-1}\,\overline{N}(\eta), \tag{4.3}$$

где η — 1-форма. Поскольку обе стороны (4.3) зануляются на (1,0)-формах, мы можем также предположить, что $\eta \in \Lambda^{0,1}(M)$.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_2 — ортонормальный базис в $\Lambda^{1,0}(M)$, удовлетворяющий

$$\omega = -\sqrt{-1}\,(\xi_1 \wedge \overline{\xi}_1 + \xi_2 \wedge \overline{\xi}_2 + \xi_3 \wedge \overline{\xi}_3), \quad \Omega = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3.$$

Поскольку обе стороны уравнения (4.2) $C^\infty(M)$-линейны, достаточно доказать (4.2) только для $\eta = \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \overline{\xi}_2$. Предположим для примера, что $\eta = \overline{\xi}_1$. Тогда

$$L_\omega \eta = -\sqrt{-1}\,\overline{\xi}_1 \wedge (\xi_2 \wedge \overline{\xi}_2 + \xi_3 \wedge \overline{\xi}_3).$$

Используя (1.4), мы получаем

$$N^* L_\omega \eta = -\sqrt{-1}\,\xi_3 \wedge \xi_2 + \sqrt{-1}\,\xi_2 \wedge \xi_3 = 2\sqrt{-1}\,\xi_2 \wedge \xi_3 = 2\sqrt{-1}\ \overline{N}(\eta).$$

Из этого следует (4.2). Предложение 4.1 доказано. ■

Предложение 4.1 используется в этой статье ровно один раз, для доказательства следующего утверждения.

Следствие 4.2: Пусть M — приблизительно кэлерово 6-многообразие, $N, \overline{N}$ — $(2,-1)$- и $(-1,2)$-части дифференциала де Рама, N^*, $\overline{N}^*$ сопряженные операторы, и Δ_N, $\Delta_{\overline{N}}$, $\Delta_{N+\overline{N}}$ соответствующие операторы Лапласа. Тогда

$$\Delta_{N+\overline{N}} = \Delta_N + \Delta_{\overline{N}}$$

Доказательство: Раскрывая скобки, получаем

$$\Delta_{N+\overline{N}} = \Delta_N + \Delta_{\overline{N}} + \{N, \overline{N}^*\} + \{\overline{N}, N^*\}.$$

Поэтому, чтобы доказать Следствие 4.2, достаточно убедиться, что

$$\{N, \overline{N}^*\} = 0, \quad \{\overline{N}, N^*\} = 0.$$

Одно из этих уравнений получается из другого комплексным сопряжением; следовательно, они эквивалентны. Докажем, например, что $\{N, \overline{N}^*\} = 0$. Как следует из Предложения 4.1,

$$\{N, \overline{N}^*\} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\{N, \{\Lambda_\omega, N\}\}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, $\{N, N\} = 0$, что ясно из уравнения (2.3). Используя суперкоммутативную версию уравнения Якоби, получаем

$$0 = \{\Lambda_\omega, \{N, N\}\} = \{\{\Lambda_\omega, N\}, N\} + \{N, \{\Lambda_\omega, N\}\} = 2\{N, \{\Lambda_\omega, N\}\}.$$

Поэтому (4.4) влечет $\{N, \overline{N}^*\} = 0$. Мы доказали Следствие 4.2. ■

Замечание 4.3: Применяя Следствие 4.2, Следствие 3.4 и Теорему 3.1, мы получаем, что

$$\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} + \Delta_N + \Delta_{\overline{N}} - \{\partial^*, \overline{\partial}\} - \{\partial, \overline{\partial}^*\} \tag{4.5}$$

и

$$\Delta_d = \Delta_{\partial - \overline{\partial}} + \Delta_N + \Delta_{\overline{N}}. \tag{4.6}$$

5 Гармонические формы на приблизительно кэлеровых многообразиях

5.1 Гармонические формы и операторы Лапласа Δ_∂, $\Delta_{\overline{\partial}}$

Для гармонических форм на компактном приблизительно кэлеровом многообразии, соотношения (3.1) Теоремы 3.1 можно существенно усилить.

Теорема 5.1: Пусть M — компактное приблизительно кэлерово 6-многообразие. Дифференциальная форма η гармонична тогда и только тогда, когда

$$\eta \in \ker \Delta_\partial \cap \ker \Delta_{\overline{\partial}} \cap \ker \Delta_{N+\overline{N}}. \tag{5.1}$$

Доказательство: Ясно, что если (5.1) выполнено, то $\partial\eta = \overline{\partial}\eta = \partial^*\eta = \overline{\partial}^*\eta = 0$, и тогда $\Delta_d\eta = 0$ в силу Теоремы 3.1.

Из Следствия 3.4 получаем:

$$\Delta_d\eta = 0 \Leftrightarrow \left(\Delta_{\partial-\overline{\partial}}\eta = 0, \text{ и } \Delta_{N+\overline{N}}\eta = 0\right). \tag{5.2}$$

Поэтому, для любой Δ_d-гармонической формы η, мы имеем $\Delta_{\partial-\overline{\partial}}\eta = 0$, то есть $(\partial - \overline{\partial})\eta = 0$ и $(\partial^* - \overline{\partial}^*)\eta = 0$. Более того, поскольку $d\eta = (N + \overline{N})\eta = 0$, оператор $\partial + \overline{\partial} = d - N - \overline{N}$ также зануляется на форме η. Вычитая из $(\partial + \overline{\partial})\eta = 0$ соотношение $(\partial - \overline{\partial})\eta = 0$, мы получаем, что $\overline{\partial}\eta = 0$. Аналогичные рассуждения доказывают остальные уравнения из

$$\partial\eta = \overline{\partial}\eta = \partial^*\eta = \overline{\partial}^*\eta = 0$$

Мы получили (5.1). Теорема 5.1 доказана. ■

5.2 Разложение Ходжа на когомологиях

Основной результат этой статьи немедленно следует из Теоремы 5.1.

Теорема 5.2: Пусть M — компактное, приблизительно кэлерово 6-многообразие, а $\mathcal{H}^i(M)$ — пространство гармонических i-форм на M. Тогда $\mathcal{H}^i(M)$ разлагается в прямую сумму гармонических форм чистого ходжева типа:

$$\mathcal{H}^i(M) = \bigoplus_{i=p+q} \mathcal{H}^{p,q}(M). \tag{5.3}$$

Более того, $\mathcal{H}^{p,q}(M) = 0$, если не выполнено $p = q$, $(p = 2, q = 1)$ или $(q = 1, p = 2)$.

Доказательство: Из Теоремы 5.1 следует, что форма η гармонична тогда и только тогда, когда $\partial\eta = \overline{\partial}\eta = \partial^*\eta = \overline{\partial}^*\eta = 0$ и $\Delta_{N+\overline{N}}\eta = 0$. Из Следствия 4.2 мы получаем, что последнее из этих уравнений равносильно

$N\eta = \overline{N}\eta = N^*\eta = \overline{N}^*\eta = 0$. Поэтому форма η гармонична тогда и только тогда, когда все ходжевы компоненты операторов d, d^* на ней зануляются:

$$\partial\eta = \overline{\partial}\eta = \partial^*\eta = \overline{\partial}^*\eta = N\eta = \overline{N}\eta = N^*\eta = \overline{N}^*\eta = 0. \tag{5.4}$$

Следовательно, все ходжевы компоненты формы η тоже удовлетворяют (5.4). Это доказывает, что все эти компоненты тоже гармоничны. Мы получили разложение (5.3).

Чтобы доказать, что $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ зануляется для (p,q) не удовлетворяющих $p=q$ либо $(p=2, q=1)$ либо $(q=1, p=2)$, мы используем Следствие 2.3. Пусть η — ненулевая гармоническая (p,q)-форма. Тогда скалярный оператор $R = \Delta_\partial - \Delta_{\overline{\partial}}$ зануляется на η, $R = \lambda^2(3-p-q)(p-q)$. Но в этом случае либо $p=q$, либо $p+q=3$. Мы немедленно получаем, что $p=q$, либо $(p=2, q=1)$, либо $(q=1, p=2)$, либо $(p=3, q=0)$, либо $(q=0, p=3)$. Последние два случая очевидно невозможны: на $\Lambda^{3,0}(M)$, $\Lambda^{0,3}(M)$, оператор $N+\overline{N}$ инъективен (это ясно, например, из (1.4)), а значит, не может зануляться; с другой стороны, из уравнения (5.4) следует $N+\overline{N}(\eta)=0$. Мы доказали Теорему 5.2. ■

Замечание 5.3: Средние когомологии компактного, приблизительно кэлерова 6-многообразия замечательно похожи на средние когомологии кэлерова многообразия. В частности, в этой ситуации определен промежуточный якобиан $T := H^{2,1}(M)/H^3(M,\mathbb{Z})$. Как и в кэлеровой ситуации, T — комплексный тор. Задано естественное псевдоголоморфное отображение из пространства псевдоголоморфных рациональных кривых на M в промежуточный якобиан.

Замечание 5.4: Все гармонические формы $\eta \in \mathcal{H}^{p,q}(M)$, $(p=2, q=1)$ или $(q=1, p=2)$ **примитивны** и **коприметивны**, то есть удовлетворяют $L_\omega(\eta)=0$ (примитивность) и $\Lambda_\omega(\eta)=0$ (коприметивность). Действительно, $\{N,\overline{N}\}$ зануляется на η, как следует из (5.4). С другой стороны, из Предложения 2.2 вытекает, что $\{N,\overline{N}\}(\eta) = (p-q)\omega\wedge\eta$, а значит, $\omega\wedge\eta=0$. Кроме того, все гармонические формы $\eta \in \mathcal{H}^{p,p}(M)$ примитивны для $p=1$ и коприметивны для $p=2$. Это следует непосредственно из уравнения (5.4). Например, для (1,1)-формы η, мы получаем $N(\eta) = \Lambda_\omega(\eta)\cdot\Omega$, а значит, η примитивна, если $N(\eta)=0$.

6 Приложение. Алгебраические дифференциальные операторы на алгебре де Рама

6.1 Алгебраические дифференциальные операторы: основные свойства

Пусть $A^* := \bigoplus^i A_i$ — градуированное суперкоммутативное кольцо с единицей. Для любого $a \in A_i$, обозначим за L_a оператор умножения на a: $L_a(\eta) = a\eta$.

Суперкоммутатор двух градуированных эндоморфизмов $x, y \in \operatorname{End}(A^*, A^*)$ обозначается

$$\{x, y\} := xy - (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} yx,$$

где $\tilde{x}$ обозначает четность x.

В дальнейшем, говоря об элементах градуированных пространств, мы будем всегда иметь в виду **чистые** элементы, то есть элементы нечетной или четной степени. **Четность** $\tilde{x}$ равна 1 для нечетных элементов, и 0 для четных.

Определение 6.1: Пространство $D^i(A^*) \subset \operatorname{End}(A^*, A^*)$ **алгебраических дифференциальных операторов порядка не больше** i — градуированное подпространство $\operatorname{End}(A^*, A^*)$, определенное индуктивно, следующим образом

(i) $D^0(A)$ — пространство A^*-линейных эндоморфизмов A^*; поскольку A^* — кольцо с единицей, $D^0(A^*) \cong A^*$.

(ii) $D^{n+1}(A^*)$ определяется как градуированное подпространство в

$$\operatorname{End}(A^*, A^*),$$

состоящее из всех эндоморфизмов $\rho \in \operatorname{End}(A^*, A^*)$ (четных или нечетных), которые удовлетворяют $\{L_a, \rho\} \in D^n(A^*)$, для всех $a \in A$.

Это понятие было определено А. Гротендиком. Используя индукцию, легко проверить, что $D^*(A^*) := \bigcup D^i(A^*)$ — фильтрованная алгебра:

$$D^i(A^*) \cdot D^j(A^*) \subset D^{i+j}(A^*), \tag{6.1}$$

а также

$$\{D^i(A^*), D^j(A^*)\} \subset D^{i+j-1}(A^*). \tag{6.2}$$

Определение 6.2: Пусть $\delta : A^* \longrightarrow A^*$ — четный или нечетный эндоморфизм. Мы говорим, что δ — **дифференцирование**, если

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{\tilde{a}\tilde{\delta}} a\delta(b),$$

для любых $a, b \in A^*$.

Легко видеть, что все дифференцирования A^* являются алгебраическими дифференциальными операторами первого порядка, и зануляются на единице алгебры A^*. Обратное тоже верно: если $D \subset D^1(A^*)$ — дифференциальный оператор первого порядка, $D(1) = 0$, то D — дифференцирование, что ясно из следующего утверждения.

Утверждение 6.3: Пусть $D \in D^1(A^*)$ — дифференциальный оператор первого порядка на алгебре A^*. Тогда $D - L_{D(1)}$ — дифференцирование A^*.

Доказательство: Достаточно доказать Утверждение 6.3 в предположении, что $D(1)=0$. Пусть $a, b \in A$ — четные или нечетные элементы. Поскольку оператор $\{D, L_a\}$ A^*-линейный, имеем

$$\begin{aligned} D(ab) - (-1)^{\tilde{a}\tilde{D}} aD(b) =& \{D, L_a\}(b) = \{D, L_a\}(1)b \\ =& D(a)b + (-1)^{\tilde{a}\tilde{D}} aD(1) = D(a)b. \end{aligned}$$

■

Замечание 6.4: Из Утверждения 6.3 ясно, что дифференциальный оператор первого порядка на A^* определяется значениями, которые он принимает на 1 и на любом наборе мультипликативных образующих A^*.

Следующее утверждение также очевидно.

Утверждение 6.5: Пусть $D \in \operatorname{End}(A^*)$ — эндоморфизм A^*, а V — набор мультипликативных образующих A^*. Предположим, что для любого $\nu \in V$, мы имеем $\{L_\nu, D\} \in D^i(A^*)$. Тогда D — алгебраический дифференциальный оператор $(i+1)$-го порядка.

■

6.2 Алгебраические дифференциальные операторы на $\Lambda^*(M)$

Пусть M — гладкое многообразие, а $\Lambda^*(M)$ — его алгебра де Рама. Легко видеть, что пространство дифференциальных операторов (в обычном смысле) и пространство алгебраических дифференциальных операторов на $\Lambda^*(M)$ совпадают. С другой стороны, порядок дифференциальных операторов на $\Lambda^*(M)$ в смысле Гротендика не совпадает с порядком дифференциального оператора в обычном смысле. Например, подстановка векторного поля в форму $C^\infty(M)$-линейна, следовательно, она имеет порядок 0. Легко видеть, что подстановка векторного поля является дифференцированием алгебры $\Lambda^*(M)$, и как алгебраический дифференциальный оператор имеет порядок 1.

Говоря о порядке дифференциальных операторов на $\Lambda^*(M)$, мы всегда имеем в виду порядок алгебраических дифференциальных операторов.

Отныне и до конца этой статьи, мы полагаем многообразие M римановым.

Утверждение 6.6: Пусть M — риманово многообразие, а $\eta \in \Lambda^1(M)$ — 1-форма. Обозначим Λ_η сопряженный оператор к L_η, $\Lambda_\eta = - * L_\eta *$. Тогда Λ_η — дифференциальный оператор первого порядка.

Доказательство: Очевидно, Λ_η — оператор подстановки векторного поля $\eta^\sharp$, двойственного к η. Подстановка векторного поля это дифференцирование.

■

Утверждение 6.6 — частный случай следующего предложения, которое доказывается независимо.

Предложение 6.7: Пусть M — риманово многообразие, а $\eta \in \Lambda^n(M)$ — n-форма. Обозначим за Λ_η сопряженный оператор к L_η, $\Lambda_\eta = (-1)^{\tilde{\eta}} * L_\eta *$. Тогда Λ_η — дифференциальный оператор порядка n.

Доказательство: Мы используем индукцию по n. Для $n = 0$, все очевидно. Как следует из Замечания 6.5, чтобы доказать, что $\Lambda_\eta \in D^n(\Lambda^*(M))$, достаточно убедиться, что

$$\{\Lambda_\eta, L_a\} \in D^{n-1}(\Lambda^*(M)), \tag{6.3}$$

для любого $a \in \Lambda^0(M), \Lambda^1(M)$. Для $a \in \Lambda^0(M)$, (6.3) очевидно, поскольку Λ_η $C^\infty(M)$-линейно, и следовательно $\{\Lambda_\eta, L_a\} = 0$. Для $a \in \Lambda^1(M)$, легко видеть, что

$$\{\Lambda_\eta, L_a\} = \Lambda_{(\eta \lrcorner a^\sharp)}$$

где $a^\sharp$ — двойственное векторное поле, а $\lrcorner$ — подстановка. Утверждение индукции немедленно приводит к (6.3). ■

6.3 Алгебраический дифференциальный оператор и его сопряженный

Основной результат этого раздела — следующее предложение.

Предложение 6.8: Пусть (M, g) — риманово многообразие, а

$$D: \ \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^{*+1}(M)$$

алгебраический дифференциальный оператор первого порядка. Обозначим за D^* его сопряженный, $D^* = -*D*$. Тогда D^* — алгебраический дифференциальный оператор второго порядка.

Доказательство:
Шаг 1: Как следует из Замечания 6.5, достаточно проверить, что оператор

$$\{\{D^*, L_a\}, L_b\} \quad \Lambda^*(M)\text{-линейный}, \tag{6.4}$$

для всех $a, b \in \Lambda^0(M), \Lambda^1(M)$.

Шаг 2:

Лемма 6.9: Пусть $\Lambda^*(M) \xrightarrow{D_1} \Lambda^{*-1}(M)$ — алгебраический дифференциальный оператор первого порядка, понижающий степень на 2. Тогда $D_1 = 0$.
Доказательство: Следует из Замечания 6.4. ■

Шаг 3: Очевидно,

$$\{\{D^*, L_a\}, L_b\}^* = D_1^*,$$

где $D_1 := \{\{D, \Lambda_a\}, \Lambda_b\}$. Из Утверждения 6.6 и (6.2) следует, что D_1 — алгебраический дифференциальный оператор первого порядка (это коммутатор нескольких дифференциальных операторов первого порядка). Если $a, b \in \Lambda^1(M)$, то D_1 понижает степень на 1. В силу Утверждения 6.3, D_1 — дифференцирование. Ясно, что дифференцирование, которое зануляется на $\Lambda^0(M)$, $C^\infty(M)$-линейно. Поэтому в этой ситуации D_1 $C^\infty(M)$-линейно.

Из Леммы 6.9 вытекает, что коммутатор D_1 с Λ_c зануляется, для всех $c \in \Lambda^1(M)$:

$$\{D_1, \Lambda_c\} = 0 \tag{6.5}$$

Оператор $D_1^* = \{\{D^*, L_a\}, L_b\}$ $C^\infty(M)$-линейный (будучи сопряженным к D_1), и коммутирует с любым L_a, как следует из (6.5). Поэтому D_1^* — $\Lambda^*(M)$-линейный. Это доказывает (6.4) для $a, b \in \Lambda^1(M)$.

Шаг 4: Очевидно, $L_a = \Lambda_a$, если $a \in \Lambda^0(M)$. Тогда

$$\{\{D^*, L_a\}, L_b\} = \{\{D^*, \Lambda_a\}, \Lambda_b\} = \{\{D, L_a\}, L_b\}^* = 0, \tag{6.6}$$

поскольку D — дифференциальный оператор первого порядка. Мы доказали (6.4) для $a, b \in \Lambda^0(M)$.

Шаг 5: Поскольку алгебра $\Lambda^*(M)$ суперкоммутативна, $\{L_a, L_b\} = 0$ для всех $a, b \in \Lambda^*(M)$. Используя суперкоммутативную версию соотношения Якоби, мы получаем

$$\{\{D^*, L_a\}, L_b\} = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{\{D^*, L_b\}, L_a\}, \tag{6.7}$$

для всех a, b. На шаге 3 и 4 мы доказали (6.4) для всех $a, b \in \Lambda^1(M)$, $a, b \in \Lambda^0(M)$. В силу (6.7), чтобы доказать 6.8 остается убедиться, что оператор $\{\{D^*, L_a\}, L_b\}$ — $\Lambda^*(M)$-линеен для $a \in \Lambda^0(M), b \in \Lambda^1(M)$.

Шаг 6: В этом случае,

$$\{D^*, L_a\} = \{D^*, \Lambda_a\} = \{D, L_a\}^* = L^*_{D(a)} = \Lambda_{D(a)}.$$

Обозначим за g тензор римановой метрики на M. Тогда

$$\{\{D^*, L_a\}, L_b\} = \{\Lambda_{D(a)}, L_b\} = g(D(a), b),$$

поскольку $\Lambda_{D(a)}$ — подстановка двойственного векторного поля $D(a)^\sharp$. Поэтому $\{\{D^*, L_a\}, L_b\}$ — скалярная функция, а следовательно, этот оператор $\Lambda^*(M)$-линейный. Предложение 6.8 доказано. ■

Благодарности: Автор признателен Роберту Брайанту и Полу-Анди Надю за поучительную переписку. П.-А. Надю принадлежит идея добавить в текст статьи Замечание 5.4.

Список литературы

[AFHS] BS Acharya, JM Figueroa-O'Farrill, CM Hull, B Spence, *Branes at conical singularities and holography*, hep-th/9808014, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1999) 1249-1286

[AcW] Bobby Acharya, Edward Witten, *Chiral Fermions from Manifolds of G_2 Holonomy*, hep-th/0109152

[AtW] Michael Atiyah, Edward Witten, *M-Theory Dynamics On A Manifold Of G_2 Holonomy*, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2003) 1-106, also hep-th/0107177.

[BFGK] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath, *Twistor and Killing spinors on Riemannian manifolds,* Teubner-Texte zur Mathematik, 124, B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[CS] Cleyton, R., Swann, A., *Einstein Metrics via Intrinsic or Parallel Torsion*, math.DG/0211446, also in: Math. Z. **247** (2004), no. 3, 513-528.

[ES] J. Eells and S. Salamon, *Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **12** (1985), 589-640.

[F] Thomas Friedrich, *Nearly Kähler and nearly parallel G_2-structures on spheres*, 2 pages, math.DG/0509146.

[FI] Friedrich, Thomas; Ivanov, Stefan, *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory*, math.DG/0102142, Asian J. Math. 6 (2002), no. 2, 303-335.

[Gr1] Gray, Alfred, *Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds,* Michigan Math. J. **12** (1965), 273-287.

[Gr2] Gray, Alfred, *Nearly Kähler manifolds*, J. Differential Geometry **4** (1970), 283-309.

[Gr3] Gray, Alfred, *Weak holonomy groups*, Math. Z. **123** (1971), 290-300.

[Gr4] Gray, Alfred, *The structure of nearly Kahler manifolds*, Math. Ann. **223** (1976), 233-248

[GH] Griffiths, Ph., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, New York, 1978.

[Gru] R. Grunewald, *Six-Dimensional Riemannian manifolds with real Killing spinors*, Ann. Global Anal. Geom. **8** (1990), 43-59.

[K] V. F. Kirichenko, *K-spaces of maximal rank*, Mat. Zametki **22** (1977), 465-476

[MNS1] Moroianu, Andrei; Nagy, Paul-Andi; Semmelmann, Uwe, *Unit Killing vector fields on nearly Kähler manifolds*, math.DG/0406492, also in Internat. J. Math. **16** (2005), no. 3, 281-301.

[MNS2] Moroianu, Andrei; Nagy, Paul-Andi; Semmelmann, Uwe, *Deformations of Nearly Kähler Structures*, 15 pages, math.DG/0611223

[N] Paul-Andi Nagy, *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations*, Asian J. Math. **3** vol. 6, (2002), 481-504, math.DG/0203038.

[V1] Verbitsky, M., *Hyperkähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory*, math.AG/0112215, 47 pages (Asian J. of Math., Vol. 6 (4), December 2002).

[V2] M. Verbitsky, *Vanishing theorems for locally conformal hyperkähler manifolds*, 2003, math.DG/0302219, also in Proc. of Steklov Institute, **246** (2004), 54-79.

[V3] Verbitsky, M., *An intrinsic volume functional on almost complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry*, 25 pages, math.DG/0507179.

Misha Verbitsky
University of Glasgow, Department of Mathematics,
15 University Gardens, Glasgow G12 8QW, Scotland.

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Б. Черемушкинская, 25, Москва, 117259, Россия

verbit@maths.gla.ac.uk, verbit@mccme.ru