Голоморфные расслоения на диагональных многообразиях Хопфа

Миша Вербицкий[1]

verbit@maths.gla.ac.uk, verbit@mccme.ru

Abstract

Пусть $A \in GL(n)$ – линейный оператор, действующий на $\mathbb{C}^n$ с собственными значениями $|\alpha_i| < 1$. Рассмотрим соответствующее многообразие Хопфа $M = (\mathbb{C}^n \backslash 0)/\langle A \rangle$. Мы доказываем, что каждое стабильное голоморфное расслоение на M поднимается до $\tilde{G}_F$-эквивариантного когерентного пучка на $\mathbb{C}^n$, где $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$ коммутативная редуктивная группа, действующая на $\mathbb{C}^n$ и содержащая A. Используя это, мы доказываем, что все расслоения на M фильтруемые, то есть получаются в результате последовательных расширений когерентных пучков ранга $\leqslant 1$.

Содержание

[1] Misha Verbitsky is an EPSRC advanced fellow supported by EPSRC grant GR/R77773/01

1 Введение

В этой работе мы изучаем многообразия Хопфа вида $M = (\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle$, где $A \in GL(n,\mathbb{C})$ – линейный оператор с собственными значениями $|\alpha_i| < 1$ (такой оператор называется **линейным сжатием**, или контракцией). Деформируя A к скалярному оператору $\lambda \cdot Id$, $0 < |\lambda| < 1$, мы находим, что M диффеоморфно $S^{2n-1} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong S^{2n-1} \times S^1$. У многообразия M нечетные числа Бетти нечетны, а значит M не допускает кэлеровой структуры. Многообразие Хопфа – первый и наиболее фундаментальный пример некэлерова многообразия, встречающийся в алгебраической геометрии.

Если A диагонально и имеет форму $A = \tau \cdot Id$, то M – эллиптическое расслоение над $\mathbb{C}P^{n-1}$, со слоями, изоморфными (неканонически) эллиптической кривой $C_\tau = \mathbb{C}^*/\langle\tau\rangle$. В этом (т. н. “классическом”) случае алгебраическая размерность M максимально возможная для многообразия Хопфа. Для произвольного A, алгебраическая размерность M может принимать любое значение от 0 до $n-1$.

Алгебраическая геометрия многообразий Хопфа, а в особенности поверхностей Хопфа, хорошо изучена (см. [Ka1], [Ka2], [BM2], [BM1], [M1]). Для $\dim M = 2$, достаточно хорошо изучена геометрия стабильных голоморфных расслоений на M ([M2]).

Типичное стабильное векторное расслоение в такой ситуации не *фильтруемо*, т.е. не представляется в виде последовательных расширений когерентных пучков ранга $\leqslant 1$. В этом аспекте категории когерентных пучков над поверхностью Хопфа разительно отличается от категории когерентных пучков над алгебраическим многообразием, где любой пучок, по очевидным причинам, фильтруем. Хорошо известно, что на многих неалгебраических многообразиях (таких, как общая K3-поверхость или двумерный тор) стабильные расслоения ранга > 1 не фильтруемы.

Если $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$, геометрия голоморфных векторных расслоений на многообразии Хопфа устроена принципиально иначе, чем в размерности 2. В [Ve2] показано, что любое голоморфное расслоение (и любой когерентный пучок) на классическом многообразии Хопфа

$$M = (\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle\lambda \cdot Id\rangle, \quad n > 2, \quad 0 < |\lambda| < 1$$

фильтруемый. В настоящей работе, мы доказываем этот результат для произвольного диагонального многообразия Хопфа.

Теорема 1.1: Пусть дан диагональный линейный оператор $A \in GL(n, \mathbb{C})$, со всеми собственными значениями $|\alpha_i| < 1$, а $M = (\mathbb{C}^n \backslash 0)/\langle A\rangle$ соответствующее многообразие Хопфа. Тогда любой когерентный пучок $F \in \operatorname{Coh}(M)$ **фильтруемый**, иначе говоря, допускает фильтрацию

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_m = F$$

с подфакторами $\operatorname{rk} F_i/F_{i-1} \leqslant 1$.

Доказательство: Используя индукцию, мы всегда можем предположить, что любой F' с $\operatorname{rk} F' < \operatorname{rk} F$ фильтруемый. Тогда F фильтруемо, если у F есть когерентный подпучок положительного ранга, меньшего $\operatorname{rk} F$. В том случае, когда такого подпучка нет, F стабилен. Поэтому Теорема 1.1 вытекает из следующей теоремы, доказанной в Секции 6 методами калибровочной теории.

Теорема 1.2: Пусть дан диагональный линейный оператор $A \in GL(n, \mathbb{C})$, со всеми собственными значениями $|\alpha_i| < 1$, а $M = (\mathbb{C}^n \backslash 0)/\langle A\rangle$ соответствующее многообразие Хопфа. Выберем локально конформно кэлерову эрмитову метрику на M, как в Разделе 2.2. Пусть дано голоморфное расслоение (или рефлексивный когерентный пучок) F на M, стабильное по отношению к этой эрмитовой структуре.[1] Тогда F фильтруемое.

Доказательство: См. Замечание 6.4. ∎

Доказательство Теоремы 1.2 устроено следдующим образом. Используя соответствие Кобаяши-Хитчина на комплексных эрмитовых многообразиях (Секция 3), мы покажем, что любое стабильное расслоение на диагональном многообразии Хопфа эквивариантно по отношению к некоторому голоморфному потоку $A(t) \in GL(n, \mathbb{C})$ (Следствие 4.4). Взяв пополнение этого потока, мы получим абелеву группу Ли $\tilde{G}_F$, которая изоморфна $(\mathbb{C}^*)^l$ (Предложение 6.1). Мы доказываем, что F $\tilde{G}_F$-эквивариантно. Это позволяет рассматривать стабильные голоморфные расслоения (или рефлексивные пучки) на M как объекты в категории

[1] Определение стабильности на эрмитовых комплексных многообразиях дается в Секции 3.

$(\mathbb{C}^*)^l$-эквивариантных когерентных пучков на $\mathbb{C}^n\backslash 0$ (Замечание 6.4). Затем мы показываем, что все объекты в этой категории фильтруемы (Теорема 6.5).

2 Диагональные многообразия Хопфа и вайсманова геометрия

2.1 Введение в вайсманову геометрию

Определение 2.1: Пусть M - комплексное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M > 1$, а $\tilde{M}$ его накрытие. Предположим, что $\tilde{M}$ снабжено кэлеровой формой ω_K, таким образом, что отображение монодромии действует на $(\tilde{M}, \omega_K)$ гомотетиями. Форма ω_K задает конформный класс эрмитовых метрик на M, который мы обозначим за $[\omega_K]$. Пара $(M, [\omega_K])$ называется **локально конформно кэлеровым (ЛКК) многообразием**. Эрмитова форма ω_H на M называется ЛКК-формой, если она принадлежит конформному классу $[\omega_K]$.

Определение 2.2: Рассмотрим ЛКК-многообразие M с ЛКК-формой ω_H. Обратный образ ω_H на $\tilde{M}$ записывается в виде $f\omega_K$, где f гладкая функция, а ω_K кэлерова форма на $\tilde{M}$. Следовательно $d\omega_H = \omega_H \wedge \theta$, где $\theta = \frac{df}{f}$ гладкая 1-форма на M. Поскольку $\theta = d\log f$, форма θ замкнута. Эта форма называется **формой Ли** (M, ω_H).

Замечание 2.3: Для общего эрмитова комплексного многообразия (M, ω_H), форма Ли определяется как $(d^c)^*\omega_H$, где $d^c = I \circ d \circ I^{-1}$ обозначает скрученный дифференциал де Рама, а d^{c*} оператор, двойственный d^c относительно эрмитовой метрики. Нетрудно доказать, что это определение совпадает с приведенным выше.

Определение 2.4: Пусть дано эрмитово комплексное многообразие (M, ω_H), $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Метрика ω_H называется **метрикой Годушона**, если $d^*d^{c*}\omega_H = 0$, или, что эквивалентно, $dd^c(\omega_H^{n-1}) = 0$.

Замечание 2.5: В работе [Ga], Поль Годушон доказал, что такая метрика существует на любом компактном комплексном многообразии, и единственна в каждом конформном классе.

Замечание 2.6: На компактном ЛКК-многообразии, результат Годушона превращается в результат о существовании и единственности ЛКК-метрики с гармонической формой Ли θ. Действительно, форма Ли $d^{c*}\omega_H = \theta$ всегда замкнута, следовательно $d^*d^{c*}\omega_H = 0$ эквивалентно $d^*\theta = 0$.

В дальнейшем, мы всегда фиксируем выбор эрмитовой метрики на компактном ЛКК-многообразии, выбирая метрику Годушона.

Определение 2.7: Пусть дано ЛКК-многообразие M, снабженное годушоновой метрикой ω_H, а θ ее форма Ли. Предположим, что θ параллельна относительно связности Леви-Чивита на (M, ω_H). Тогда M называется **многообразием Вайсмана**

Замечание 2.8: Согласно результатам Камишимы и Орнеа ([KO]), компактное ЛКК-многообразие M вайсманово тогда и только тогда, когда оно допускает голоморфное векторное поле, действующее на M конформно, и таким образом, что поднятие этого действия на кэлерово накрытие $\tilde{M}$ – не изометрия $(\tilde{M}, \omega_K)$.

Замечание 2.9: Нетрудно видеть (см. [DO]) что из параллельности θ вытекает голоморфность вектора $\theta^\sharp$, двойственного θ (так называемого **поля Ли**). Более того, $\theta^\sharp$ действует на M изометриями, и его поднятие на $\tilde{M}$ задает на $(\tilde{M}, \omega_K)$ неизометрическое конформное преобразование. Это дает первую часть теоремы Камишимы-Орнеа.

За дальнейшими результатами и деталями вайсмановой геометрии, читатель отсылается к [DO], [GO], [OV1], [OV2], [OV3].

В дальнейшем, нам понадобится следующая лемма, которая доказана в [Ve1] (также см. [OV2]).

Лемма 2.10: Пусть дано вайсманово многообразие M, $\theta^\sharp$ его поле Ли, а Σ комплексное голоморфное слоение, порожденное $\theta^\sharp$. Обозначим за $\omega_0 := d^c\theta$ вещественную (1,1)-форму, где $d^c = I \circ d \circ I^{-1}$ это скрученный ифференциал де Рама. Тогда $\omega_0 \geqslant 0$, и нуль-слоение формы ω_0 – в точности Σ.

■

Замечание 2.11: Пусть $L_{\mathbb{R}}$ вещественное плоское линейное расслоение на M с теми же коэффициентами монодромии, как и ω_K (в конформной геометрии, это расслоение известно как **весовое расслоение**). Каждое невырожденное положительное сечение $L_{\mathbb{R}}$ соответствует, единственным образом, ЛКК-метрике на M, и обратное тоже верно. Метрика Годушона определяет, таким образом, сечение $\mu_G \in L_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим комплексификацию $L := L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ как голоморфное эрмитово линейное расслоение, с голоморфной структурой индуцированной из плоской связности, и эрмитовой структурой, которая определяется соотношением $|\mu_G| = const$. Обозначим за ∇_C связность Черна, соответствующую данной метрике и голоморфной структуре. Тогда кривизна ∇_C равна $-\sqrt{-1}\,\omega_0$ ([Ve1], [OV2]).

2.2 ЛКК-структура на диагональных многообразиях Хопфа

Примеры ЛКК-многообразий и многообразий Вайсмана можно получить, изучая геометрию многообразий Хопфа.

Определение 2.12: Пусть $A \in GL(n)$ – линейный оператор, действующий на $\mathbb{C}^n$ с собственными значениями $|\alpha_i| < 1$. Обозначим за $\langle A\rangle \subset GL(n, \mathbb{C})$ циклическую группу, порожденную A. Фактор

$$(\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle$$

нзывается **линейным многообразием Хопфа**. Если A диагонализуемо, $(\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle$ называется **диагональным многообразием Хопфа**.

Замечание 2.13: Если взять произвольное голоморфное сжатие вместо линейного, можно получить общее определение многообразия Хопфа (см. например [Ka1], [Ka2]).

Замечание 2.14: Многообразия Вайсмана были определены в работах Изу Вайсмана, который посвятил им большую серию статей в конце 1970-х и начале 1980-х, (см. напр. [Va1], [Va2]). Вайсман называл их “обобщенными многообразиями Хопфа”. Это название не прижилось, поскольку многие многообразия Хопфа, как было впоследствии доказано, не являются вайсмановыми. Для линейных многообразий Хопфа, $(\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle$ вайсманово тогда и только тогда, когда A диагонализуемо (см. [OV3]).

Пусть задан диагональный линейный оператор $A \in GL(n, \mathbb{C})$,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n, \end{bmatrix}, |\alpha_i| < 1$$

Рассмотрим кэлерову метрику $\omega_K := -\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi$ на $\mathbb{C}^n\backslash 0$, определенную через посредство кэлерова потенциала $\varphi: \mathbb{C}^n\backslash 0 \longrightarrow \mathbb{R}$, где φ определяется формулой

$$\varphi(t_1, ..., t_n) = \sum |t_i|^{\beta_i}, \tag{2.1}$$

а $\beta_i := \log_{|\alpha_i|^{-1}} C$ положительные вещественные числа, которые удовлетворяют соотношению $|\alpha_i|^{-\beta_i} = C$ для некоторой вещественной константы $C > 1$, выбранной таким образом, что все β_i удовлетворяют $|\beta_i| \geqslant 2$. По построению, $A^*\varphi = C^{-1}\varphi$. Действительно,

$$A^*\varphi(t_1, ..., t_n) = \varphi(A(t_1, ..., t_n)) = \sum |\alpha_i t_i|^{\beta_i} = C^{-1}\varphi(t_1, ..., t_n).$$

Следовательно $\omega_K := -\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi$ кэлерова форма, удовлетворяющая $A^*\omega_K = C^{-1}\omega_K$. Мы получаем, что диагональное многообразие Хопфа $(\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle$ локально конформно кэлерово. Чтобы убедиться, что оно вайсманово, заметим, что голоморфное векторное поле $\log A$ действует на $(\mathbb{C}^n\backslash 0, \omega_K)$ конформно, и применим теорему Камишима-Орнеа (Замечание 2.8).

Для дальнейшего, нам понадобится явная форма поля Ли для метрики Годушона, индуцированной локально конформно кэлеровой структурой на $(\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle$.

Рассмотрим действие комплексной группы Ли $V(t) = e^{\mathbb{C}v}$, порожденной голоморфным векторным полем

$$v := \sum_i -t_i \log|\alpha_i| \frac{d}{dt_i}.$$

По построению, $V(\lambda)$ – линейный оператор, который можно записать в виде $\sum e^{|\alpha_i|\lambda} t_i$. Для вещественных λ, этот оператор умножает φ на константу C^λ (это доказывается таким же способом, как и равенство $A(\varphi) = C^{-1}\varphi$). Для чисто мнимого λ, $V(\lambda)$ сохраняет φ (это ясно из конструкции). Следовательно $v^c := I(v)$ действует на $(\mathbb{C}^n\backslash 0, \omega_K)$ голоморфными изометриями.

Соответствующее отображение моментов $\mu: \mathbb{C}^n \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{R}$ задается формулой $d\mu = \omega_K(v^c, \cdot)$. Эту дифференциальную форму также можно записать в виде

$$(dd^c\varphi) \lrcorner v^c = \operatorname{Lie}_{v^c} d^c\varphi - d(d^c\varphi \lrcorner v^c). \tag{2.2}$$

Первый член справа от знака равенства в (2.2) зануляется, поскольку v^c действует на $(\mathbb{C}^n \backslash 0)$, сохраняя φ и комплексную структуру. Это дает

$$\omega_K(v^c, \cdot) = (dd^c\varphi) \lrcorner v^c = -d(d^c\varphi \lrcorner v^c) = d(d\varphi \lrcorner v) = \log C \cdot d\varphi$$

(последнее равенство следует из $d\varphi \lrcorner v = \operatorname{Lie}_v \varphi = \log C \cdot \varphi$). Мы получили, что $\log(C)\varphi$ – отображение моментов для группы $V(t)$, действующей на $(\mathbb{C}^n \backslash 0, \omega_K)$.

Из этого вытекает следующее утверждение, хорошо известное во многих других ситуациях

Утверждение 2.15: Пусть дан диагональный линейный оператор $A \subset GL(n, \mathbb{C})$ со всеми собственными значениями $|\alpha_i| < 1$. Рассмотрим кэлерову метрику $\omega_K := -\sqrt{-1}\, \partial\bar\partial\varphi$ на $\mathbb{C}^n \backslash 0$, где кэлеров потенциал φ определяется формулой (2.1), и пусть $V(t) = e^{\mathbb{C}v}$ – голоморфный поток, порожденный $v := \sum_i -t_i \log|\alpha_i| \frac{d}{dt_i}$. Обозначим за v^c векторное поле $I(v)$. Тогда $e^{\mathbb{R}v^c} \subset V(t)$ сохраняет кэлерову структуру на $\mathbb{C}^n \backslash 0$, и соответствующее отображение моментов равно $\log(C)\varphi$:

$$d(\log(C)\varphi) = \omega_k(v^c, \cdot).$$

■

Рассмотрим эрмитову форму $\omega_H = \frac{\omega_K}{\varphi}$ на $M = (\mathbb{C}^n \backslash 0)/\langle A \rangle$. Соответствующая форма Ли θ получена как

$$d\omega_H = -\frac{\omega_K}{\varphi^2} = -\omega_H \wedge \log d\varphi,$$

следовательно, $\theta = \frac{d\varphi}{\varphi}$. Двойственное по отношению к ω_H векторное поле (поле Ли) задается как $\theta^\sharp = v$, где $v = \log(C) \sum_i -t_i \log|\alpha_i| \frac{d}{dt_i}$. Это ясно, потому что v двойственно $\log(C)d\varphi$ по отношению к ω_K, как следует из Утверждения 2.15, а $\omega_H = \frac{\omega_K}{\varphi}$.

Мы получили следующее предложение.

Предложение 2.16: В условиях Утверждения 2.15, рассмотрим эрмитову форму $\omega_H = \frac{\omega_K}{\varphi}$ на $M = (\mathbb{C}^n \backslash 0)/\langle A \rangle$. Тогда соответствующее поле Ли задается как

$$\theta^\sharp = \log(C) \sum_i -t_i \log|\alpha_i| \frac{d}{dt_i}. \tag{2.3}$$

Более того, метрика ω_H годушонова.

Доказательство: Равенство (2.3) доказано выше. Чтобы доказать, что ω_H годушонова, достаточно удостовериться, что функция $|\theta^\sharp|_{\omega_H}$ постоянна. В самом деле, из определения d^* сразу следует, что

$$d^*\theta = \nabla_{\theta^\sharp}\theta^\sharp.$$

С другой стороны, поле $\theta^\sharp$ киллингово, поскольку

$$\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp}\varphi = C\varphi, \quad \operatorname{Lie}_{\theta^\sharp}\omega_K = C\omega_K,$$

а следовательно

$$\operatorname{Lie}_{\theta^\sharp}\omega_H = C\omega_H - C\omega_H = 0.$$

По другому определению киллинговых полей, это значит, что

$$(\nabla_X\theta^\sharp, Y)_{\omega_H} = -(\nabla_Y\theta^\sharp, X)_{\omega_H}$$

для любых векторных полей X, Y. Взяв $Y = \theta^\sharp$, и применяя

$$\operatorname{Lie}_X(\theta^\sharp, \theta^\sharp)_{\omega_H} = 0,$$

мы получим

$$0 = (\nabla_X\theta^\sharp, \theta^\sharp)_{\omega_H} = -(\nabla_{\theta^\sharp}\theta^\sharp, X)_{\omega_H}.$$

Поскольку поле X произвольное, из этого сразу следует $\nabla_{\theta^\sharp}\theta^\sharp = 0$. Следовательно, Предложение 2.16 вытекает из равенства $\omega_H(\theta^\sharp, \overline{\theta}^\sharp) = const$, или, что то же самое,

$$\omega_K(\theta^\sharp, \overline{\theta}^\sharp) = const \cdot \varphi. \tag{2.4}$$

Записывая ω_K в виде

$$\omega_K = -\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\varphi = \sum_i dt_i \wedge d\overline{t}_i |t_i|^{\beta_i - 2}\frac{\beta_i^2}{4},$$

и используя $\theta^\sharp = \log(C)\sum_i -t_i \log|\alpha_i| \frac{d}{dt_i}$, мы получаем

$$\omega_K(\theta^\sharp, \overline{\theta}^\sharp) = \log(C)^2 \sum_i (\log|\alpha_i|)^2 |t_i|^{\beta_i} \frac{\beta_i^2}{4}. \tag{2.5}$$

По определению $e^{-\log|\alpha_i|\beta_i} = C$, другими словами, $\beta_i = -\frac{\log C}{\log \alpha_i}$. Подставляя это в (2.5), мы получаем

$$\omega_K(\theta^\sharp, \overline{\theta}^\sharp) = \sum_i |t_i|^{\beta_i} \frac{(\log C)^4}{4} = \frac{(\log C)^4}{4}\varphi.$$

Это доказывает Предложение 2.16. ■

3 Стабильные расслоения на эрмитовых многообразиях

3.1 Метрика Годушона и стабильность

Определение 3.1: Пусть задано компактное комплексное эрмитово многообразие M. Выберем метрику Годушона в том же самом конформном классе.[1] Рассмотрим когерентный пучок без кручения F на M. Обозначим его детерминантное расслоение за $\det F$. Выберем эрмитову метрику ν на $\det F$, и пусть Θ обозначает кривизну соответствующей связности Черна. Мы определяем степень F следующим образом:

$$\deg F := \int_M \Theta \wedge \omega^{\dim_{\mathbb{C}} M - 1},$$

где $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ эрмитова форма годушоновой метрики. Степень не зависит от выбора эрмитовой метрики ν на $\det F$. Действительно, если $\nu' = e^\psi \nu$, $\psi \in C^\infty(M)$, то ассоциированная форма кривизны записывается как $\Theta' = \Theta + \partial\overline{\partial}\psi$, и мы получаем

$$\int_M \partial\overline{\partial}\psi \wedge \omega^{\dim_{\mathbb{C}} M - 1} = 0$$

поскольки метрика ω годушонова.

[1] Эрмитова метрика ω на комплексном многообразии M размерности n называется **метрикой Годушона**, или **годушоновой**, если $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$ (Определение 2.4). Если M компактно, метрика Годушона существует в каждом конформном классе, и единственна с точностью до множителя, как доказано в [Ga].

Если F голоморфное эрмитово векторное расслоение, Θ_F его кривизна, а метрика ν получена ограничением из F, то $\Theta = \operatorname{Tr}_F \Theta_F$. В кэлеровом случае это позволяет соотнести степень расслоения и его первый класс Черна. В некэлеровом случае степень не является топологическим инвариантом: степень зависит от голоморфной геометрии пучка F. Более того, степень не дискретна, как это происходит в кэлеровой ситуации, но принимает континуум значений.

Пример 3.2: Тривиальное C^∞-расслоение на многообразии Вайсмана допускает голоморфную структуру любой заданной степени $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. 4.3).

Определение 3.3: Пусть F ненулевой когерентный пучок без кручения на компактном комплексном эрмитовом многообразии M Тогда $\operatorname{slope}(F)$ (наклон) определяется как

$$\operatorname{slope}(F) := \frac{\deg F}{\operatorname{rk} F}.$$

Пучок F называется

стабильным	если для любого подпучка $F' \subset F$ соблюдается $\operatorname{slope}(F') < \operatorname{slope}(F)$
полустабильным	если для любого подпучка $F' \subset F$ соблюдается $\operatorname{slope}(F') \leqslant \operatorname{slope}(F)$
полистабильным	если F можно представить как прямую сумму стабильных когерентных пучков одного и того же наклона

Замечание 3.4: Такое определение стабильности для эрмитовых комплексных многообразий весьма полезно, поскольку основная часть стандартных свойств стабильных и полустабильных расслоений, известных из алгебраической геометрии, выполняются и в этой ситуации. В частности, выполняется следующее: любое линейное расслоение стабильно; все стабильные пучки просты; фильтрация Жордана-Гёльдера и и Хардера-Нарасимхана определена и устроена точно таким же образом, как и в обычной (кэлеровой) ситуации ([LT1], [Br]).

С другой стороны, не все расслоения **фильтруемы**, иначе говоря, получаются последовательными расширениями когерентных пучков ранга $\leqslant 1$. Например, на общей (неалгебраической) K3-поверхности касательное расслоение нефильтруемо.

3.2 Соответствие Кобаяши-Хитчина

Утверждение о соответствии Кобаяши-Хитчина (теорема Дональдсона-Уленбек-Яу) переносится в эрмитову ситуацию дословно, следуя работе Ли и Яу ([LY]).

Определение 3.5: Пусть дано голоморфное эрмитово векторное расслоение на компактном комплексном эрмитовом многообразии M, а $\Theta \in \Lambda^{1,1}(M) \otimes \operatorname{End}(B)$ – кривизна соответствующей связности Черна ∇. Рассмотрим оператор $\Lambda : \ \Lambda^{1,1}(M) \otimes \operatorname{End}(B) \longrightarrow \operatorname{End}(B)$ (эрмитов сопряженный к $b \longrightarrow \omega \otimes b$, где ω – эрмитова форма на M). Связность ∇ называется **связностью Эрмита-Эйнштейна** (или же **Янг-Миллса**) если $\Lambda\Theta = const \cdot \operatorname{Id}_B$.

Теорема 3.6: (соответствие Кобаяши-Хитчина) Пусть дано голоморфное векторное расслоение B на компактном комплексном многообразии, снабженном метрикой Годушона. Расслоение B допускает связность Эрмита-Эйнштейна ∇ тогда и только тогда, когда B полистабильно. Более того, связность Эрмита-Эйнштейна в этом случае единственна.

Доказательство: См. [LY], [LT1], [LT2]. ■

4 Стабильные расслоения на вайсмановых многообразиях

Существование положительной точной $(1,1)$-формы ω_0, определенной в Лемме 2.10, приводит к большому количеству сильных результатов об алгебраической геометрии вайсмановых многообразих (см. напр. [Ve1] и [OV2]). Для нас особенно важна структурная теорема для расслоений Эрмита-Эйнштейна, которая впервые получена в [Ve2] (Теорема 4.3) для положительных главных эллиптических расслоений, допускающих похожую структуру. Эти многообразия не всегда вайсмановы (например, многообразие Калаби-Экманна не вайсманово); точно также, не все вайсмановы многообразия являются эллиптическими расслоениями. Тем не менее, доказательство структурной теоремы из [Ve2] может быть практически дословно повторено в вайсмановой ситуации.

Теорема 4.1: Пусть дано компактное вайсманово многообразие M, $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$, а B – стабильное расслоение степени 0 на M. Обозначим за Σ одномерное комплексное голоморфное слоение, порожденное полем Ли $\theta^\sharp$ (поле Ли голоморфно, так как многообразие M вайсманово). Тогда $\Theta(v,\cdot) = 0$ для каждого $v \in \Sigma$. В частности, B эквивариантно по отношению к комплексной группе Ли $V(t)$, порожденной $\theta^\sharp$, и эта эквивариантная структура совместима со связностью.

Доказательство: Рассмотрим отображение

$$\Lambda: \ \Lambda^{1,1}(M, \operatorname{End}(B)) \longrightarrow \operatorname{End}(B)$$

определенное в разделе 3.2. По определению, форма Θ **примитивна**, иначе говоря, удовлетворяет уравнению $\Lambda\Theta = 0$. Теперь Теорема 4.1 вытекает из следующего предложения.

Предложение 4.2: Пусть дано компактное вайсманово многообразие M, $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$, B эрмитово расслоение со связностью, а $\Theta \in \Lambda^{1,1}(M,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(B)$ замкнутая антиэрмитова вещественная (1,1)-форма. Предположим, что Θ примитивна, т.е. $\Lambda\Theta = 0$. Тогда $\Theta(v,\cdot) = 0$ для любого $v \in \Sigma$.

Доказательство: Домножая метрику на константу, мы нормализуем форму Ли θ таким образом, что $|\theta| = 1$. Пусть $\theta, \theta_1, ..., \theta_{n-1}$ ортонормальный базис в $\Lambda^{1,0}(M)$, такой, что $\theta \in \Sigma$, $\theta_i \in \Sigma^\perp$. Рассмотрим форму ω_0 (Лемма 2.10). Эта форма точна, положительна, и имеет $n-1$ строго положительных собственных значений. Используя базис, описанный выше, мы можем записать

$$\omega_H = -\sqrt{-1}\ \left(\theta \wedge \overline{\theta} + \sum_i \theta_i \wedge \overline{\theta}_i\right), \quad \omega_0 = -\sqrt{-1}\ \left(\sum_i \theta_i \wedge \overline{\theta}_i\right) \tag{4.1}$$

где ω_H – эрмитова форма на M (см. [Ve1], Предложение 6.1).

В этом базисе, мы можем записать Θ в виде

$$\Theta = \sum_{i\neq j} (\theta_i \wedge \overline{\theta}_j + \overline{\theta}_i \wedge \overline{\theta}_j) \otimes b_{ij} + \sum_i (\theta_i \wedge \overline{\theta}_i) \otimes a_i \tag{4.2}$$

$$+ \sum_i (\theta \wedge \overline{\theta}_i + \overline{\theta} \wedge \overline{\theta}_i) \otimes b_i + \theta \wedge \overline{\theta} \otimes a, \tag{4.3}$$

где b_{ij}, b_i, a_i, $a \in \mathfrak{u}(B)$ анти-эрмитовы автоморфизмы B.

Пусть $\Xi := \operatorname{Tr}(\Theta \wedge \Theta)$. Это замкнутая (2,2)-форма на M. Из уравнения (4.2) следует

$$(\sqrt{-1}\,)^n \Xi \wedge \omega_0^{n-2} = \operatorname{Tr}\left(-\sum b_i^2 + a\left(\sum a_i\right)\right)$$

С другой стороны, $\sum a_i + a = \Lambda\Theta = 0$, а следовательно

$$(\sqrt{-1}\,)^n \Xi \wedge \omega_0^{n-2} = \operatorname{Tr}\left(-\sum b_i^2 - a^2\right).$$

Поскольку $u \longrightarrow \operatorname{Tr}(-u^2)$ – положительно определенная симметричная билинейная форма на $\mathfrak{u}(B)$, интеграл

$$\int_M (\sqrt{-1}\,)^n \Xi \wedge \omega_0^{n-2} \tag{4.4}$$

неотрицателен, и равен нулю только если b_i и a тождественно равны нулю. Используя $n > 2$, мы находим, что интеграл (4.4) обращается в нуль, поскольку форма ω_0 точна, а Ξ – замкнута. Следовательно, b_i и a тождественно равны нулю, как и утверждает Предложение 4.2. Мы доказали Теорему 4.1. ■

Замечание 4.3: Можно применить результаты Теоремы 4.1 к произвольному стабильному расслоению на M, используя следующий трюк. Рассмотрим линейное расслоение L (Замечание 2.11). Напишем связность Черна на L в виде

$$\nabla_C = \nabla_{triv} - \sqrt{-1}\,\theta^c,$$

где $\theta^c = I(\theta)$ (см. [Ve1], (6.11)), и пусть ∇_{triv} - тривиальная связность на L, ассоциированная с тривиализацией L, заданной в Замечании 2.11. Поскольку $d\theta^c = \omega_0$, L имеет степень $\delta := \int \omega_0 \wedge \omega_H^{n-1}$ и это число, очевидно, положительно (см. (4.1)). Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$, обозначим за L_λ голоморфное эрмитово расслоение со связностью $\nabla_{triv} - \sqrt{-1}\,\frac{\lambda}{\delta}\theta^c$. Очевидно, L_λ имеет степень λ. Мы получаем, что любое вайсманово многообразие допускает голоморфное линейное расслоение L_λ любой наперед заданной степени λ. Более того, L_λ по построению $V(t)$-эквивариантно (форма θ^c $V(t)$-инвариантна, поскольку $V(t)$ действует на M, сохраняя метрику и голоморфную структуру). Мы получили следующее утверждение.

Следствие 4.4: Пусть дано компактное вайсманово многообразие M, $\dim_{\mathbb{C}} M > 2$, а B – стабильное голоморфное расслоение на M. Рассмотрим комплексный голоморфный поток $V(t) = e^{t\theta^\sharp}$, порожденный полем Ли $\theta^\sharp$. Тогда B допускает естественную $V(t)$-эквивариантную структуру.

Доказательство: Домножая B на L_λ с подходящим выбором $\lambda \in \mathbb{R}$, мы получим стабильное расслоение степени 0. Теперь Теорема 4.1 влечет Следствие 4.4. ∎

5 Стабильные расслоения на многообразиях Хопфа и когерентные пучки на $\mathbb{C}^n$

5.1 Допустимые эрмитовы структуры на рефлексивных пучках

Определение 5.1: Пусть дано комплексное многообразие X и когерентный пучок F на X. Мы определим "двойственный" пучок F^* как $F^* := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_X)$. Рассмотрим естественное функториальное отображение $\rho_F : F \longrightarrow F^{**}$. Пучок F^{**} называется **рефлексивной оболочкой**, или **рефлексизацией** F. Пучок F называется **рефлексивным**, если естественное отображение $\rho_F : F \longrightarrow F^{**}$ – изоморфизм.

Замечание 5.2: Для любого когерентного пучка F, отображение $\rho_{F^*} : F^* \longrightarrow F^{***}$ изоморфизм ([OSS], глава II, доказательство леммы 1.1.12). Следовательно, рефлексивная оболочка любого пучка всегда рефлексивна.

Рефлексивная оболочка может быть получена ограничением на открытое подмножество и взятием прямого образа.

Лемма 5.3: Пусть дано гладкое комплексное многообразие X, когерентный пучок F на X и замкнутое комплексное подмногообразие $Z \subset X$. Обозначим за j открытое вложение $(X \backslash Z) \xhookrightarrow{j} X$. Предположим, что обратный образ j^*F рефлексивен на $(X \backslash Z)$. Тогда прямой образ $j_* j^* F$ также рефлексивен.

Доказательство: [OSS], глава II, лемма 1.1.12. ∎

Замечание 5.4: Из Леммы 5.3 следует, что рефлексизация неособого в коразмерности 1 пучка F изоморфна $j_* j^* F$, где $j : (X \backslash Z) \hookrightarrow X$ естественное вложение, а Z особый локус F.

Используя результаты [BS], можно обобщить соответствие Кобаяши-Хитчина на рефлексивные пучки. Напомним, что **особое множество** $Sing(F)$ пучка F есть множество всех точек $x \in M$, таких, что F не локально тривиален ни в какой в окрестности x.

Определение 5.5: [BS] Пусть F когерентный пучок на гладком комплексном многообразии M, а ∇ - эрмитова связность на F, определенная вне его особенностей. Обозначим за Θ кривизну ∇. Связность ∇ называется **допустимой**, если следующие условия выполнены

(i) $\Lambda\Theta \in \operatorname{End}(F)$ равномерно ограничена

(ii) $|\Theta|^2$ локально интегрируемо на M.

Теорема 5.6: [BS] Любой когерентный пучок без кручения на гладком многообразии можно наделить допустимой связностью. Любую допустимую связность можно продолжить на множество гладких точек F. Более того, если расслоение B на $M\backslash Z$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} Z \geqslant 2$ снабжено допустимой связностью, с кривизной Θ, которая локально квадратично интегрируема на M, то B можно продолжить до когерентного рефлексивного пучка на M. ∎

Для когерентных пучков существует версия теоремы Дональдсона-Уленбек-Яу, доказанная Бандо и Сиу.

Теорема 5.7: Пусть дано компактное кэлерово многообразие M, а F когерентный пучок без кручения. Пучок F можно снабдить допустимой эрмитово-эйнштейновой метрикой тогда и только тогда, когда F полистабилен. Если к тому же F стабилен, то эта метрика единственна, с точностью до постоянного множителя.

Доказательство: [BS], теорема 3. ∎

Доказательство, приведенное в [BS], нетрудно приспособить для эрмитовых комплексных многообразий, снабженных метрикой Годушона.

5.2 Расслоения Эрмита-Эйнштейна на многообразиях Хопфа и допустимые метрики

Теорема 5.8: Пусть дано диагональное многообразие Хопфа

$$M = (\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle, \quad n \geqslant 3,$$

а B - стабильное голоморфное расслоение на M. Обозначим за $\tilde{B}$ обратный образ B на $\mathbb{C}^n \backslash 0$. Тогда $\tilde{B}$ можно продолжить до рефлексивного когерентного пучка F на $\mathbb{C}^n$. Более того, F $V(t)$-эквивариантен, где $V(t)$ – комплексный голоморфный поток на $\mathbb{C}^n$, порожденный полем Ли $\theta^\sharp = \log(C)\sum_i -t_i \log|\alpha_i|\frac{d}{dt_i}$.

Доказательство: Используя Замечание 4.3, можно предположить, что B имеет степень 0. Рассмотрим метрику Эрмита-Эйнштейна на B, и поднимем ее на $\tilde{B}$. Обозначим за $\tilde{\Theta}$ кривизну $\tilde{B}$. Чтобы продолжить $\tilde{B}$ на $\mathbb{C}^n$, мы применяем теорему Бандо-Сиу (Теорема 5.6). Нужно доказать, что $\tilde{B}$ допустимо в смысле Определения 5.5. Кэлерова метрика ω_K на $\mathbb{C}^n$ конформно эквивалентна поднятой с M, а следовательно $\Lambda\tilde{\Theta} = 0$. Условие $\Lambda\tilde{\Theta} = 0$ значит, что $\tilde{\Theta}$ ортогонально эрмитовой форме поточечно, поэтому это условие конформно инвариантно. Чтобы доказать, что $\tilde{B}$ допустимо, остается убедиться, что $\tilde{\Theta}$ локально квадратично-интегрируемо на $\mathbb{C}^n$. Функция $|\tilde{\Theta}|^2$ может быть выражена с помощью соотношений Ходжа-Римана следующим образом.

Лемма 5.9: Пусть дано эрмитово расслоение B_1 на эрмитовом почти комплексном многообразии M_1 размерности n, а

$$\nu \in \Lambda^{1,1}(M_1, \mathfrak{su}(B_1))$$

$\mathfrak{su}(B_1)$-значная (1,1)-форма, которая примитивна, т.е. удовлетворяет условию $\Lambda(\nu) = 0$. Тогда

$$|\nu|^2 = -\sqrt{-1}\,\frac{n-1}{2n}\operatorname{Tr}(\Lambda^2(\nu\wedge\nu)), \tag{5.1}$$

где

$$\Lambda:\ \Lambda^{p,q}(M_1, \mathfrak{su}(B_1)) \longrightarrow \Lambda^{p-1,q-1}(M_1, \mathfrak{su}(B_1))$$

стандартный оператор Ходжа на дифференциальных формах, двойственный умножению на кэлерову форму.

Доказательство: Элементарное вычисление, и по сути то же самое, которое доказывает билинейные соотношения Ходжа-Римана (см. напр. [BS]). ∎

Замечание 5.10: Уравнение (5.1) можно переписать в виде

$$|\nu|^2 \operatorname{Vol}(M_1) = -\sqrt{-1}\,\frac{n-1}{2n\cdot 2^n\cdot n!}\operatorname{Tr}(\nu\wedge\nu)\wedge\omega_1^{n-2}, \tag{5.2}$$

где ω эрмитова форма на M_1, а $\operatorname{Vol}(M_1)$ форма объема, связанная с римановой структурой. Это ясно из определения Λ и соотношения $\operatorname{Vol}(M_1) = \frac{1}{2^n n!}\omega_1^n$.

Используя (5.2), мы получаем, что L^2-интегрируемость $\tilde{\Theta}$ равносильна интегрируемости формы

$$\operatorname{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}. \tag{5.3}$$

Форма $\tilde{\Theta}$ по построению A-инвариантна, а ω_K удовлетворяет

$$A^*(\omega_K) = c\omega_K,$$

поскольку M локально конформно кэлерово. Следовательно, форма (5.3) однородна по отношению к действию A:

$$A^* \left(\operatorname{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}\right) = c^{n-2} \operatorname{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}, c < 1. \tag{5.4}$$

Обозначим за D фундаментальную область для группы $\langle A \rangle$,

$$D := \{x \in \mathbb{C}^n \backslash 0 \mid 1 \leqslant \rho(x) < C\}$$

Тогда $\mathbb{C}^n \backslash 0 = \cap_{i\in\mathbb{Z}} A^i(D)$. Чтобы проверить, что $\tilde{\Theta}$ L^2-интегрируемо в окрестности 0, нам нужно показать, что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{A^i(D)} |\tilde{\Theta}|^2 \operatorname{Vol} = -\sqrt{-1}\, \frac{n-1}{2n \cdot 2^n \cdot n!} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A^i(D)} \operatorname{Tr}(\tilde{\Theta} \wedge \tilde{\Theta}) \wedge \omega_K^{n-2}$$

сходится. В силу (5.4), эта сумма является геометрической прогрессией, и она сходится, если $n > 2$. Мы доказали, что $\tilde{B}$ допустимое. Теперь, из теоремы Бандо-Сиу (Теорема 5.6) немедленно следует первое утверждение Теоремы 5.8. Второе утверждение вытекает из Леммы 5.3. Действительно, пусть $(\mathbb{C}^n \backslash 0) \xhookrightarrow{j} \mathbb{C}^n$ обозначает стандартное вложение. Тогда $F = j_* \tilde{B}$ (Лемма 5.3). В силу Следствия 4.4, $\tilde{B}$ $V(t)$-эквивариантно. Следовательно $j_* \tilde{B}$ также $V(t)$-эквивариантно. ∎

Замечание 5.11: Используя версию теоремы Дональдсона-Уленбек-Яу для рефлексивных пучков, Теорема 5.8 обобщается дословно на случай рефлексивных когерентных пучков.

6 Эквивариантные пучки на $\mathbb{C}^n$

6.1 Продолжение $V(t)$-эквивариантности до $(\mathbb{C}^*)^l$-эквивариантности

Пусть дано диагональное многообразие Хопфа

$$M = (\mathbb{C}^n \backslash 0)/\langle A\rangle,$$

а $V(t) = e^{\mathbb{C}\theta^\sharp}$, $t \in \mathbb{C}$ – голоморфный поток, порожденный полем Ли $\theta^\sharp$ как указано выше. Тогда $V(t)$ действует на M голоморфными изометриями ([KO]). Рассмотрим замыкание G группы $V(t)$, $t \in \mathbb{C}$, внутри группы $\operatorname{Iso}(M)$ изометрий M. Обозначим за $\tilde{G}$ поднятие G в $\operatorname{Aut}(\tilde{M})$, где $\tilde{M}$ - минимальное кэлерово накрытие M ([OV1], [OV2]). По построению, $\tilde{G}$ – наименьшая замкнутая подгруппа в $GL(n,\mathbb{C})$, содержащая $V(t)$ и A. Нетрудно убедиться, что $\tilde{G}$ – редуктивная комплексная коммутативная группа Ли. Аналогичный результат верен для любых многобразий Вайсмана.

Предложение 6.1: Пусть дано вайсманово многообразие M с полем Ли $\theta^\sharp$, G – замыкание соответствующего $\theta^\sharp$ голоморфного потока в $\operatorname{Iso}(M)$, $\tilde{M}$ минимальное кэлерово накрытие, а $\tilde{G}$ поднятие G в $\operatorname{Aut}(\tilde{M})$. Тогда группа монодромии накрытия $\tilde{M}$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Более того, $\tilde{G} \cong (\mathbb{C}^*)^k$, и группа монодромии накрытия лежит в $\tilde{G}$.

Доказательство: [OV2], предложение 4.3. ∎

Предложение 6.2: В предположениях Теоремы 5.8, рассмотрим действие группы $V(t)$ на $\Gamma(\mathbb{C}^n, F)$. Введем на $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ и $\Gamma(\mathbb{C}^n, F)$ адическую топологию таким образом, что $\lim f_i \longrightarrow 0$ при $[f_i]_0 \longrightarrow \infty$, где $[f_i]_0$ обозначает порядок нуля f_i в $0 \in \mathbb{C}^n$. Очевидно, что $V(t)$ непрерывно в адической топологии. Обозначим за $\tilde{G}_F$ замыкание $V(t)$-действия в $\Gamma(\mathbb{C}^n, F) \times \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, в адической топологии. Тогда

(i) Естественное отображение $\tilde{G}_F \xrightarrow{\rho} GL(F/\mathfrak{m}F) \times GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ инъективно, где $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал 0 в $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$.

(ii) $\tilde{G}_F$ изоморфно замыканию образа $V(t)$ при естественном отображении $V(t) \longrightarrow GL(F/\mathfrak{m}F) \times GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

(iii) Рассмотрим естественную проекцию $\tilde{G}_F \xrightarrow{\pi} \tilde{G}$ индуцированную отображением

$$GL(F/\mathfrak{m}F) \times GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \longrightarrow GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Тогда π удовлетворяет $g(af) = \pi(g)(a)g(f)$ для любых

$$f \in \Gamma(\mathbb{C}^n, F), \quad a \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}, \quad g \in \tilde{G}_F.$$

Это дает $\tilde{G}_F$-эквивариантную структуру на F.

(iv) Группа $\tilde{G}_F$ изоморфна $(\mathbb{C}^*)^l$.

Доказательство: Поскольку кольцо голоморфных функций нетерово, теорема 6.2 (i) очевидна из леммы Накаямы, Теорема 6.2 (ii) немедленно следует из Теоремы 6.2 (i). Теорема 6.2 (iii) вытекает из Теоремы 6.2 (ii) и $V(t)$-эквивариантности F.

Чтобы доказать Теорему 6.2 (iv), мы используем Теорему 6.2 (ii), и замечаем, что $\tilde{G}_F$ коммутативна как замыкание однопараметрической группы в группе Ли $GL(F/\mathfrak{m}F) \times GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Чтобы доказать, что $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$, надо убедиться в том, что эта группа Ли редуктивна, другими словами, показать, что $V(t)$ действует диагонально на $(F/\mathfrak{m}F) \times (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Группа $V(t)$ действует на $\mathbb{C}^n$ голоморфно и конформно. Поскольку метрика Эрмита-Эйнштейна на B единственна, с точностью до множителя, группа $V(t)$ действует на B также конформно. Мы получаем, что $V(t)$ действует конформно на бесконечномерном эрмитовом пространстве $\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F)$ голоморфных сечений F на открытом шаре $B_{\mathbb{C}^n} \subset \mathbb{C}^n$, а также на $\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Поскольку унитарные преобразования конечномерного пространства диагонализуемы, группа $V(t)$ диагонально действует на любом конечномерном подпространстве

$$L \subset \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F) \times \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

которое сохраняется $V(t)$. Используя классический аргумент, восходящий к теории нормальных форм и теореме Пуанкаре-Дюлака (см. [OV3], Теорема 3.3, также [Ar]), мы находим следующее. Пространство

$$\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F) \times \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

содержит всюду плотное (в подходящей, например, $\mathfrak{m}$-адической, топологии) подпространство, порожденное конечномерными $V(t)$-инвариантными подпространствами. Следовательно, действие $V(t)$ на

$$\Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, F) \times \Gamma(B_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

диагонально в плотном подпространстве. Из этого видно, что действие $V(t)$ диагонально на любом конечномерном факторпространстве, и, в частности, на

$$(F/\mathfrak{m}F) \times (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Мы доказали Теорему 6.2 (iv). ■

Замечание 6.3: Используя версию теоремы Дональдсона-Уленбек-Яу для когерентных пучков (теорему Бандо-Сиу), Теорему 6.2 можно дословно повторить для случая стабильных когерентных пучков (см. Замечание 5.11),

Замечание 6.4: Обозначим за $\mathbb{C}^n_*$ комплексное многообразие $\mathbb{C}^n\backslash 0$. Для любого $\tilde{G}_F$-эквивариантного когерентного пучка на $\mathbb{C}^n_*$, мы можем получить когерентный пучок на $\mathbb{C}^n_*/\langle A\rangle$ следующим образом. Когерентные пучки на $\mathbb{C}^n_*/\langle A\rangle$ это то же самое, что $\langle A\rangle$-эквивариантные пучки на $\mathbb{C}^n_*$, а группа $\langle A\rangle$ лежит в $\tilde{G}$ в силу Предложения 6.1. Следовательно, чтобы доказать фильтруемость стабильного расслоения B на $M = (\mathbb{C}^n_*)/\langle A\rangle$, достаточно убедиться, что соответствующий $\tilde{G}_F$--эквивариантный когерентный пучок F фильтруем на $\mathbb{C}^n_*$ в категории $\operatorname{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}^n_*)$ $\tilde{G}_F$-эквивариантных когерентных пучков. Значит, следующая теорема доказывает Теорему 1.2.

Теорема 6.5: Рассмотрим коммутативную группу Ли $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$ действующую на $\mathbb{C}^n_*$ посредством гомоморфизма $\tilde{G}_F \xrightarrow{\pi} GL(\mathbb{C}, n)$. Обозначим за $\operatorname{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}^n_*)$ категорию $\tilde{G}_F$-эквивариантных когерентных пучков на $\mathbb{C}^n_*$. Предположим, что $\pi(\tilde{G}_F)$ содержит линейное сжатие. Тогда все объекты $\operatorname{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}^n_*)$ получаются последовательными расширениями $\tilde{G}_F$-эквивариантных когерентных пучков ранга 1.

Мы доказываем Теорему 6.5 в разделе 6.2.

6.2 $(\mathbb{C}^*)^l$-эквивариантные когерентные пучки на $\mathbb{C}^n\backslash 0$

Мы работаем в предположениях Теоремы 6.5.

Лемма 6.6: Пусть дан $\tilde{G}_F$-эквивариантный когерентный пучок $R \in \operatorname{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}^n_*)$ над $\mathbb{C}^n_* := \mathbb{C}^n\backslash 0$. Тогда R порожден над $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_*}$ конечномерным $\tilde{G}_F$-инвариантным подпространством сечений $V \subset \Gamma(R, \mathbb{C}^n_*)$.

Доказательство: Подгруппы вида $\mathbb{C}^*$ плотны в $\tilde{G}_F \cong (\mathbb{C}^*)^l$. Следовательно, существует вложение $\mathbb{C}^* \overset{\mu}{\hookrightarrow} \tilde{G}_F$ действующее на $\mathbb{C}^n$ со всеми собственными значениями, отличными от 1. Это действие можно записать как

$$t \longrightarrow \begin{bmatrix} t^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{k_n} \end{bmatrix}$$

где все k_i – целые числа, не равные 0. Легко видеть, что μ действует на $\mathbb{C}_*^n$ свободно в общей точке, и фактормножество $\mathbb{C}_*^n/\mu(\mathbb{C}^*)$ наделено естественной структурой орбиобразия (стэка Делиня-Мамфорда). Этот фактор известен как **взвешенное проективное пространство**, и обозначается как

$$\mathbb{C}P^{n-1}(k_1, k_2, ...k_n).$$

Взвешенное проективное пространство наделено структурой проективного орбиобразия. Задать μ-эквивариантный когерентный пучок на $\mathbb{C}_*^n$ это по определению то же самое, что задать когерентный пучок на орбиобразии

$$\mathbb{C}P^{n-1}(k_1, k_2, ...k_n).$$

Пусть R_0 – пучок на $\mathbb{C}P^{n-1}(k_1, k_2, ...k_n)$, соответствующий пучку R, рассматриваемому как μ-эквивариантный пучок на $\mathbb{C}_*^n$. Сечения $R_0 \otimes \mathcal{O}(i)$ соответствуют сечениям R, на которые $\mu(\mathbb{C}^*)$ действует с весом i. Мы получаем последовательность конечномерных подпространств

$$\Gamma(R_0 \otimes \mathcal{O}(i)) \subset \Gamma(R).$$

где $\Gamma(R)$-пространство сечений R над $\mathbb{C}_*^n$. Поскольку $\mathcal{O}(1)$ обильно, пучок $R_0 \otimes \mathcal{O}(N)$ глобально порожден для достаточно большого N (это следует, например, из теоремы Кодаиры-Накано для орбиобразий, см. [Ba]). Тогда пространство $\oplus_{i \leqslant N}\Gamma(R_0 \otimes \mathcal{O}(i))$ порождает $\Gamma(R)$ над $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n}$. Поскольку $\tilde{G}_F$ коммутирует с $\mu(\mathbb{C}^*)$, пространство $\Gamma(R_0 \otimes \mathcal{O}(i)) \subset \Gamma(R)$ $\tilde{G}_F$-инвариантно. Это доказывает Лемму 6.6. ∎

Теперь мы можем доказать фильтруемость для произвольного $R \in \mathrm{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$. В силу Леммы 6.6, для любого $R \in \mathrm{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}_*^n)$ существует $\tilde{G}_F$-эквивариантное отображение $R_1 \longrightarrow R \longrightarrow 0$, где $R_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n} \otimes_{\mathbb{C}} W$, а W – конечномерное представление $\tilde{G}_F$. Поскольку $\tilde{G}_F$ коммутативно, $W = \oplus W_i$, где W_i – $\tilde{G}_F$-инвариантные одномерные подпространства в W. Это дает эпиморфизм

$$\oplus(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_*^n} \otimes W_i) \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

где все слагаемые $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_*} \otimes W_i$ $\tilde{G}_F$-эквивариантные линейные расслоения. Следовательно, R фильтруемо в категории $\operatorname{Coh}_{\tilde{G}_F}(\mathbb{C}^n_*)$. Это доказывает Теорему 6.5. Теорема 1.2 также доказана. ∎

Благодрности: Я благодарен Руксандре Морару, которая обратила мое внимание на вопрос фильтруемости пучков на многообразиях Хопфа, и Мите Новикову за телефонную лекцию о теории нормальных форм и теореме Пуанкаре-Дюлака.

Список литературы

[Ar] V.I. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 250, Springer Verlag, 1983.

[Ba] W.L. Baily, *On the imbedding of V-manifolds in projective spaces*, Amer. J. Math. **79** (1957), 403-430.

[BS] Bando, S., Siu, Y.-T, *Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics*, In: Geometry and Analysis on Complex Manifolds, Festschrift for Professor S. Kobayashi's 60th Birthday, ed. T. Mabuchi, J. Noguchi, T. Ochiai, World Scientific, 1994, pp. 39-50.

[BM1] Vasile Brinzanescu, Ruxandra Moraru, *Stable bundles on non-Kahler elliptic surfaces*, math.AG/0306192, 15 pages.

[BM2] Vasile Brinzanescu, Ruxandra Moraru, *Twisted Fourier-Mukai transforms and bundles on non-Kahler elliptic surfaces*, math.AG/0309031, 13 pages.

[Br] L. Bruasse, *Harder-Narasimhan filtration on non-Kähler manifolds*, Int. Journal of Maths, 12(5):579-594, 2001.

[DO] S. Dragomir, L. Ornea, *Locally conformal Kähler geometry*, Progress in Mathematics, 155. Birkhäuser, Boston, MA, 1998.

[Ga] P. Gauduchon, *La 1-forme de torsion d'une variete hermitienne compacte*, Math. Ann., 267 (1984), 495–518.

[GO] P. Gauduchon and L. Ornea, *Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces*, Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 1107–1127.

[KO] Y. Kamishima, L. Ornea, *Geometric flow on compact locally conformally Kahler manifolds*, math.DG/0105040, 21 pages.

[Ka1] Kato, Ma. *Some remarks on subvarieties of Hopf manifolds*, A Symposium on Complex Manifolds (Kyoto, 1974). Sûrikaisekikenkyûsho Kókyûroku No. 240 (1975), 64–87.

[Ka2] Kato, Ma. *On a characterization of submanifolds of Hopf manifolds*, Complex analysis and algebraic geometry, pp. 191–206. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[LY] Li, Jun, and Yau, S.-T., *Hermitian Yang-Mills connections on non-Kahler manifolds,* in "Mathematical aspects of string theory" (S.T. Yau ed.), World Scientific Publ., London, 1987, pp. 560-573.

[LT1] Lübke, M., Teleman, A., *The Kobayashi-Hitchin correspondence*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995. x+254 pp

[LT2] Lübke, M., Teleman, A., *The universal Kobayashi-Hitchin correspondence on Hermitian manifolds*, math.DG/0402341, 90 pages.

[M1] Moraru, R., *Integrable systems associated to a Hopf surface,* Canad. J. Math. **55** (2003), no. 3, 609–635.

[M2] Moraru, R., *Stable bundles on Hopf manifolds*, preprint (2004).

[OSS] Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х., *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах,* Москва, Мир, 1984.

[OV1] L. Ornea, M. Verbitsky, *Structure theorem for compact Vaisman manifolds*, math.DG/0305259, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 5-6, 799–805.

[OV2] L. Ornea, M. Verbitsky, *Immersion theorem for Vaisman manifolds*, math.AG/0306077, 28 pages

[OV3] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformal Kähler manifolds with potential,* math.AG/0407231, 11 pages.

[Va1] I. Vaisman, *Generalized Hopf manifolds*, Geom. Dedicata **13** (1982), no. 3, 231–255.

[Va2] I. Vaisman, *A survey of generalized Hopf manifolds*, Rend. Sem. Mat. Torino, Special issue (1984), 205–221.

[Ve1] M. Verbitsky, *Vanishing theorems for locally conformal hyperkähler manifolds*, 2003, math.DG/0302219, 41 pages.

[Ve2] M. Verbitsky, *Stable bundles on positive principal elliptic fibrations*, 17 pages, 2004, math.AG/0403430.

Misha Verbitsky
University of Glasgow, Department of Mathematics,
15 University Gardens, Glasgow G12 8QW, Scotland.

Institute of Theoretical and Experimental Physics
B. Cheremushkinskaya, 25, Moscow, 117259, Russia

verbit@maths.gla.ac.uk, verbit@mccme.ru