кардинальное число

$$\mathrm{Card}(\{\varnothing\}) = \tau_Z(\mathrm{Eq}(\{\varnothing\}, Z))$$ [1].

3) Обозначим через 2 кардинальное число $\mathrm{Card}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$; это кардинальное число всякого двухэлементного множества, элементы которого различны.

4) °Гильбертово пространство счетного типа равномощно множеству действительных чисел.$_\circ$

2. *Соотношение порядка между кардинальными числами*

Соотношение „X равномощно некоторой части множества Y“ эквивалентно „существует инъекция множества X в Y“; оно эквивалентно также соотношению „Card(X) равномощно некоторой части множества Card(Y)“ (гл. II, § 3, теорема 1).

Теорема 1. *Соотношение* $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$:

„$\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ — кардинальные числа и $\mathfrak{x}$ равномощно некоторой части множества $\mathfrak{y}$“ — соотношение полного порядка (§ 2, n° 1).

---

[1]) Разумеется, не следует смешивать математический *терм, обозначенный* (гл. I, § 1, n° 1) символом „1“, и слово „один“ обычного языка. Терм, обозначенный через „1“, равен в силу определения, данного выше, терму, обозначенному символом

$$\tau_Z((\exists u)(\exists U)(u = (U, \{\varnothing\}, Z) \text{ и } U \subset \{\varnothing\} \times Z$$
$$\text{и } (\forall x)((x \in \{\varnothing\}) \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in U)) \text{ и } (\forall x)(\forall y)(\forall y')(((x, y) \in U$$
$$\text{и } (x, y') \in U) \Rightarrow (y = y')) \text{ и } (\forall y)((y \in Z) \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in U))$$
$$\text{и } (\forall x)(\forall x')(\forall y)(((x, y) \in U \text{ и } (x', y) \in U) \Rightarrow (x = x')))).$$

Грубая оценка показывает, что терм, *обозначенный* таким образом, является знакосочетанием из нескольких десятков тысяч знаков (каждый из которых есть один из знаков τ, $\square$, $\vee$, $\neg$, $=$, $\in$, $\supset$). [В приведенном сокращенном обозначении соотношение, заключенное в самые *внешние* скобки (т. е. идущее после знака τ_Z), выражает существование биекции множества $\{\varnothing\}$ на множество Z (т. е. является соотношением $\mathrm{Eq}(\{\varnothing\}, Z)$). Именно на интуитивном уровне утверждается существование такого соответствия u с графиком U, которое и является искомой биекцией. После кванторов существования $(\exists u)$ и $(\exists U)$ записано соотношение, служащее формальной записью определения биекции $\{\varnothing\}$ на Z, согласно гл. II, § 3, n° 7. Это соотношение состоит из соединенных союзом „и“ шести соотношений, первое из которых означает, что u есть тройка $(U, \{\varnothing\}, Z)$; второе — что U есть подмножество произведения второй и третьей координаты тройки u (тем самым u оказывается соответствием между $\{\varnothing\}$ и Z); третье — что соответствие u определено для всех элементов множества $\{\varnothing\}$; четвертое — что график соответствия u функционален; пятое — что функция u сюръективна; шестое — что функция u инъективна. Это последнее, шестое, соотношение добавлено переводчиком; оно отсутствует во французском оригинале (может быть, потому, что всякая функция, определенная на $\{\varnothing\}$, инъективна). Нам представляется, однако, что, поскольку свойство инъективности участвует в определении биекции, запись этого свойства должна присутствовать в соотношении $\mathrm{Eq}(\{\varnothing\}, Z)$. — *Прим. ред.*]

Так как $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\}$ истинно для всякого кардинального числа $\mathfrak{x}$, все сводится к тому, чтобы доказать, что для любого множества E кардинальных чисел соотношение „$\mathfrak{x} \in E$ и $\mathfrak{y} \in E$ и $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$“ является соотношением полного порядка в E. Рассмотрим множество $A = \bigcup_{\mathfrak{x} \in E} \mathfrak{x}$; всякое кардинальное число $\mathfrak{x} \in E$ является, таким образом, частью множества A. На A существует соотношение полного порядка (§ 2, теорема 1), обозначим его $x \leqslant y$. Всякая часть множества A равномощна некоторому отрезку множества A (§ 2, следствие 3 теоремы 3). Для произвольного кардинального числа $\mathfrak{x} \in E$ рассмотрим множество отрезков множества A, равномощных множеству $\mathfrak{x}$; это множество отрезков не пусто и имеет, следовательно, наименьший элемент $\varphi(\mathfrak{x})$ (§ 2, предложение 2). Соотношение

„$\mathfrak{x} \in E$ и $\mathfrak{y} \in E$ и $\mathfrak{x}$ равномощно некоторой части множества $\mathfrak{y}$“ *эквивалентно* соотношению

$$„\mathfrak{x} \in E \quad \text{и} \quad \mathfrak{y} \in E \quad \text{и} \quad \varphi(\mathfrak{x}) \subset \varphi(\mathfrak{y})“.$$

В самом деле, оно, очевидно, следует из этого второго соотношения; с другой стороны, если $\mathfrak{x}$ равномощно некоторому подмножеству множества $\mathfrak{y}$, то не может быть $\varphi(\mathfrak{y}) \subset \varphi(\mathfrak{x})$ и $\varphi(\mathfrak{y}) \neq \varphi(\mathfrak{x})$, ибо тогда существовал бы отрезок множества $\varphi(\mathfrak{y})$, равномощный множеству $\mathfrak{x}$ (§ 2, следствие 3 теоремы 3), что противоречит определению множества $\varphi(\mathfrak{x})$. Так как множество отрезков множества A вполне упорядочено включением (§ 2, теорема 2), теорема доказана.

Обозначим через $\mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{y}$ соотношение $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$. Для того чтобы множество X было равномощно некоторой части множества Y, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y)$.

Ясно, что $0 \leqslant \mathfrak{x}$ для всякого кардинального числа $\mathfrak{x}$ и $1 \leqslant \mathfrak{x}$ для всякого кардинального числа $\mathfrak{x} \neq 0$.

Следствие 1. *Из любых двух множеств одно равномощно некоторой части другого.*

Следствие 2. *Если каждое из двух множеств равномощно некоторой части другого множества, то эти множества равномощны.*

Замечание. Для любого множества A существует множество, элементами которого являются кардинальные числа Card(X) всех подмножеств X множества A; в самом деле, это множество объектов вида Card(X) для $X \in \mathfrak{P}(A)$ (гл. II, § 1, n° 6). Для всякого кардинального числа $\mathfrak{a}$ соотношение „$\mathfrak{x}$ — кардинальное число и $\mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{a}$“ является, таким образом, коллективизирующим по $\mathfrak{x}$, ибо оно эквивалентно соотношению „$\mathfrak{x}$ имеет вид Card(X) для $X \subset \mathfrak{a}$“; множество кардинальных чисел $\mathfrak{x}$, удовлетворяющих этому соотношению, называется *множеством (всех) кардинальных чисел* $\leqslant \mathfrak{a}$.